SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin

Vordiplomklausur zur Höheren Mathematik I/II für Elektrotechniker

Montag, 29.8.05

1. Berechnen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag folgender komplexer Zahlen.

   (i) $z := \exp(2 + \mathrm{i}\pi/2)$. (ii) $w := \dfrac{2+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

   (je 2 P.)

2. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

   lösbar? Bestimmen Sie für dieses α die Lösungsmenge.

   (10 P.)

3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$. (ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$.

   (je 3 P.)

4. Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihe.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 2^{-n} x^n$. (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n$.

   (je 4 P.)

5. Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale.

   (i) $\displaystyle\int_0^1 \sin(\sqrt{x})\, \mathrm{d}x$. (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2-1)}\, \mathrm{d}x$.

   (je 4 P.)

6. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} .$$

   (i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und möglichst viele linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A.

(ii) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D derart, daß $S^{\mathrm{T}}AS = D$.

(je 5 P.)

7. Finden Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3$. (8 P.)

8. Bestimmen Sie den volumengrößten Quader innerhalb des Ellipsoids mit Halbachsen $a, b, c > 0$, d.h. finden Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = 8xyz$, unter der Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \;=\; 1\;.$$

(8 P.)

9. Es sei $B := \{(x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1^2 + x_2^2 \leq 4,\, x_1 \leq x_2\}$. Berechnen Sie

$$\int_B x_1(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}\;\mathrm{d}(x_1, x_2)\,.$$

(10 P.)

10. Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) \;:=\; t^3,\; -\pi \leq t < \pi\;.$$

(i) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(ii) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie ihren Wert an der Stelle π.

(je 5 P.)

11. Die Kurve γ sei definiert durch

$$\gamma:\; x(t) \;=\; \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},\; t \in [0, 2\pi]\;,$$

und das Vektorfeld f sei definiert durch

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\; f(x_1, x_2, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} e^{x_1} - x_2 + 3x_1^2 x_2 \\ x_1 + x_1^3 + x_2^2 e^{x_2} + e^{x_3} \\ x_2 e^{x_3} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f^{\mathrm{T}}(x)\;\mathrm{d}x$, indem Sie den Stokesschen Integralsatz auf die obere Hälfte der Einheitssphäre anwenden. (10 P.)

12. Bei einem Glücksspiel werfe man 2 ideale Würfel. Der Gewinn X sei definiert als 0, falls mindestens eine 1 oder 2 auftritt, und als die Summe der Augenzahlen sonst. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ des Gewinns. (10 P.)