Das Problem mit den Eimern

L.H. Brewis, F.J. Király

Wir werden das System der Eimer als ein mathematisches Modell darstellen. Wir betrachten n Eimer mit Volumina $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Wir nehmen an, dass wir für jeden Zeitpunkt $t = i$, $i > 0$, genau eine Operation auf den Eimern ausführen durfen. Damit wir die Situation einfacher beschreiben können, werden wir zu den Zeitpunkten $t = i$ die Menge Wasser in Litern in dem j-Eimer als f_j^i angeben, und wir werden sie (die f_j^i) als einen Vektor v_i zusammenfassen, das heißt

$$v_i := [f_1^i, f_2^i, \ldots, f_n^i].$$

Wir bemerken, dass nach unserer Annahme gilt, dass $v_1 = [0, 0, \ldots, 0]$.

Jetzt betrachten wir die verschiedenen erlaubten Operationen. Erstens dürfen wir einen Eimer leeren. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass wir den ersten Eimer leer machen. Dazu definieren wir den Operator L_1, der auf $v_i := [f_i^1, \ldots, f_i^n]$ wie folgt operiert:

$$L_1 v_i := [0, f_2^i, \ldots, f_n^2].$$

Das heißt, wenn wir zu einem Zeitpunkt $t = i$ diese Operation ausführen, dann ist $v_{i+1} := L_1 v_i$. Wir definieren $L_2, \ldots, L_n$ analog als die Operationen, die die Leerung der anderen Eimer bezeichnen.

Als nächstes betrachten wir die Operation, die einen Eimer voll macht. Ohne Einschränkung nehmen wir wieder an, dass sie auf dem ersten Eimer ausgeführt wird. Dazu definieren wir den Operator M_1; er operiert auf $v_i := [f_1^i, \ldots, f_n^i]$ wie folgt:

$$M_1 v_i := [V_1, f_2^i, \ldots, f_n^i].$$

Das heißt, wenn wir zu einem Zeitpunkt $t = i$ diese Operation ausfuhren, dann ist $v_{i+1} := M_1 v_i$. Wir definieren analog $M_2, \ldots, M_n$ als die Operationen, die die Vollmachungen der anderen Eimer bezeichnet.

Schließlich betrachten wir die letzte erlaube Operation. Diese ist, das Wasser von einem Eimer in einen anderen umzufüllen. Wir nehmen an, dass wir das Wasser, welches zum Zeitpunkt $t = i$ in Eimer j ist, in den Eimer k umfüllen. Natürlich durfen wir nicht mehr Wasser in den Eimer k kippen als der Eimer k enthalten kann; das heißt, Wasser, das die maximale Kapazität V_k von Eimer k überschreiten würde, bleibt im Eimer j.

Wir definieren dafür den Operator $W_{j\to k}$. Unser Ziel ist jetzt zu sehen, wie genau er auf $v_i := [f_i^1, \ldots, f_i^n]$ operiert. Im Fall, dass $f_j^i + f_k^i \leq V_k$, sehen, wir dass wir alles Wasser in den Eimer k umfüllen koennen, und deswegen definieren wir in diesem Fall

$$W_{j\to k} v_i := [f_i^1, \ldots, 0, \ldots, f_i^j + f_i^k, \ldots, f_i^n].$$

Hier ist die 0 an der j-ten Stelle, und die Summe $f_i^j + f_i^k$ an der k-ten Stelle. Alle andere Stellen bleiben unverändert.

Im Fall, dass $f_i^j + f_i^k > V_k$ ist, sehen wir, dass nicht alles von dem Wasser in Eimer j in den Eimer k passt. Das heisst, $f_i^j + f_i^k - V_k$ bleibt im Eimer j übrig, und deswegen definieren wir in diesem Fall

$$W_{j\to k} v_i := [f_i^1, \ldots, f_i^j + f_i^k - V_k, \ldots, V_k, \ldots, f_i^n].$$

Hier ist $f_i^j + f_i^k - V_k$ an der j-ten Stelle, und V_k an der k-ten Stelle. Alle anderen Stellen bleiben unverändert.

Zur Klarheit definieren wir jetzt eine Eimer-Zahl als eine Zahl x, sodass es eine Reihe von Operatoren $O_1, \ldots, O_m$ existieren, mit $O_i \in \{L_i, M_i, W_{j\to k} \mid j, k \in \{1, \ldots, n\}\}$, mit

$$v_{m+1} = O_m v_m$$

und $v_1 = [0, \ldots, 0]$, sodass x eine der Zahlen in dem Vektor v_{m+1} ist.

Wir werden zeigen: Eine Zahl ist genau dann eine Eimer-Zahl, wenn sie Vielfaches von $\mathrm{ggT}(V_1, \ldots, V_n)$ ist. Zunächst die Hinrichtung:

0.1 Theorem. *Jede Eimer-Zahl ist ein Vielfaches von* $ggT(V_1, \ldots, V_n)$.

Wir geben den Beweis. Fuer einen Vektor $v = [g_1, \ldots, g_n]$ definieren wir $\hat{v} := [g_1 \mod d, \ldots, g_n \mod d]$, wo $d := \mathrm{ggT}(V_1, \ldots, V_n)$. Wir bemerken, dass $\hat{v}_1 = [0, 0, \ldots, 0]$. Weiterhin, merken wir, dass wenn $\hat{v}_i = [0, 0, \ldots, 0]$, dann folgt sogar dass $\widehat{Ov_i} = [0, 0, \ldots, 0]$, wo O einer der oben genannten Operatoren ist. Deswegen sind alle Eimer-Zahlen kongruent zu 0 modulo d, und der Satz folgt. $\square$

Eine interessante Bemerkung ist der nächste Satz:

0.2 Lemma. *Wir machen die Annahme, dass* $V_1 \leq V_2 \leq \ldots V_n$. *Wenn* x *eine Eimer-Zahl ist, dann ist* $x + V_j \mod V_n$ *auch eine Eimer-Zahl.*

Da wir angenommen haben, dass x eine Eimer-Zahl ist, gibt es eine Reihefolge von Operationen, die wir auf den Eimer ausfuhren können, sodass in mindest einem Eimer x liter Wasser gibt. Wir leeren alle anderen Eimer, und kippen diese x Liter Wasser in den Eimer n. Wir beschreiben den Zustand jetzt mit dem Vektor $v_i = [0, \ldots, 0, x]$, mit der Annahme, dass wir jetzt am Zeitpunkt $t = i$ sind.

Unsere nächste Operation ist dann M_j, und wir definieren $v_{i+1} := M_j v_i$, das heißt

$$v_{i+1} := [0, 0, \ldots, V_j, 0, 0 \ldots, x],$$

mit dem V_j in der Position j. Danach führen wir $W_{j\to n}$ aus, das heißt wir kippen das Wasser vom Eimer j in den Eimer k, und wir haben

$$v_{i+2} := W_{j\to n} v_{i+1},$$

und deswegen entweder

$$v_{i+2} := [0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, x + V_j],$$

oder

$$v_{i+2} := [0, 0, \ldots, V_j + x - V_n, \ldots, V_n].$$

Im ersten Fall, wenn $x + V_j = V_n$, dass heißt dass $x + V_j \cong 0 \mod V_n$, finden wir durch Leerung voM Eimer n das Ergebnis. Wenn aber $x + V_j < V_n$, dann ist $x + V_j \mod V_n$ genau das, was in Eimer n ist, und wir haben wieder das Ergebnis gefunden.

Was übrig bleibt, ist der Fall $x + V_j > V_n$, das heißt

$$v_{i+2} := [0, 0, \ldots, V_j + x - V_n, \ldots, V_n].$$

Aber wir haben angenommen, dass $V_1 \leq V_2 \leq \ldots \leq V_n$, und deswegen ist $V_j + x - V_n < V_n$, also ist $V_j + x - V_n$ genau $V_j + x \mod V_n$ (die kanonische Restklasse), und wir haben dass Ergebnis erreicht. Durch Eimer n zu leeren und das was in Eimer j ist, in den Eimer n zu kippen, bekommen wir sogar das erwünschte Ergebnis im Eimer n. $\square$

Jetzt beweisen wir die Rückrichtung:

0.3 Theorem. *Der* $ggT(V_1, \ldots, V_n)$ *ist eine Eimer-Zahl.*

Man weiß, dass es ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $d := a_1V_1 + \ldots + a_nV_n$. Wenn $V_1 = V_2 = \ldots = V_n$, dann sehen wir, dass nichts zu zeigen ist. Daher nehmen wir an, dass $V_1 \leq V_2 \leq \ldots \leq V_n$ und $V_1 < V_n$. Wir sehen, dass $d < V_n$.

Weiterhin bemerken wir, dass $d \mod V_n$ also genau d ist. Um d zu bekommen, müssen wir daher einfach $a_1V_1 + \ldots + a_nV_n \mod V_n$ rechnen.

Der erste Schritt ist, fuer negative a_j positive Alternativen zu finden. Wir definieren b_j als ein beliebige positive ganze Zahl sodass

$$a_j \cong b_j \mod V_n.$$

Wir bemerken, dass

$$a_1V_1 + \ldots + a_nV_n \cong b_1V_1 + \ldots + b_nV_n \mod V_n = d.$$

Jetzt folgt den Satz durch eine Anwendung des obigen Lemmas $\square$.