I. Bouw
F. Kiraly

17.04.2008
SS 2008

Übungen zur elementaren Zahlentheorie - Blatt 1

Abgabe am 24.04.2008 vor der Vorlesung

Voraussetzung für den Erwerb des Übungsscheins sind 50 Prozent der Summe zu bearbeitender Übungspunkte. Diese setzen sich aus den für alle zu bearbeitenden Aufgaben und den Aufgaben für die jeweiligen Studiengänge zusammen:
Einige Aufgaben sind mit den Vermerken IST und LA versehen. Die mit IST indizierten Aufgaben (v.a. Berechnungen und Algorithmik) zählen nur im Studiengang Informations-Systemtechnik zur zu bearbeitenden Gesamtpunktzahl, die mit LA nur in allen anderen Studiengängen (Lehramt, Bachelor Mathematik/Wirtschaftsmathematik, Informatik etc). Nicht indizierte Aufgaben zählen in allen Studiengängen zur Gesamtpunktzahl.
Beispielsweise müssen auf diesem Blatt die IST-Studierenden die Aufgaben 1,2,3 und 5 mit einer Gesamtpunktzahl von 20 Punkten bearbeiten, alle anderen 1,2,3,4 mit einer Gesamtpunktzahl von 20 Punkten. Aufgabe 4 kann von IST-Studenten bearbeitet werden (muss aber nicht), Aufgabe 5 von allen anderen.
Die Blätter sind einzeln abzugeben (eine Person pro Blatt, ein Blatt pro Person). Die Ergebnisse werden im SLC (https://slc.mathematik.uni-ulm.de/cgi-bin-ssl/slc) abrufbar sein. Bitte tragen Sie sich daher dort für die Vorlesung ein, falls Sie das nicht schon getan haben.

Aufgabe 1: Primfaktorzerlegung (1+1+1+1+1 = 5 Punkte) Finden Sie die Primfaktorisierung der folgenden Zahlen. Zeigen Sie dazu, dass die von Ihnen angegeben Faktorisierung tatsächlich eine Primfaktorisierung ist.

(a) 515

(b) 907

(c) 3234846615

(d) 10!

(e) $\binom{30}{15}$

Aufgabe 2: Der euklidische Algorithmus (2+2 = 4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler

$$g = \mathrm{ggT}(1911, 3465).$$

(b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $g = x \cdot 1911 + y \cdot 3465$.

Aufgabe 3: Hauptlemma der Zahlentheorie (1+2+2 = 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Eine Zahl ist genau dann ein Quadrat, wenn die Exponenten in ihrer Primfaktorzerlegung gerade sind.

(b) Gegeben seien zwei Zahlen a und b . Zeigen Sie: Gilt $a^i | b^j$ für Zahlen $i > j$, so gilt $a | b$. Zeigen Sie außerdem, dass das nicht für alle i, j gilt.

(c) Gegeben sei ein Zahl n , sodass für alle Primzahlen p mit $p | n$ gilt $p^2 | n$. Zeigen Sie: n ist Produkt einer Quadratzahl und einer Kubikzahl. Zeigen Sie, dass diese Zerlegung im Allgemeinen nicht eindeutig ist.

Aufgabe 4 (LA): Bewertungen (1+1+2+2 = 6 Punkte)
Sei n eine Zahl mit Primfaktorzerlegung

$$n = \prod_{p_i \in \mathbb{P}} p_i^{e_i}.$$

Die Zahl e_i heißt p_i -Bewertung von n . Beispielsweise ist die 2-Bewertung von 12 gleich 2. Wir schreiben $v_{p_i}(n) := e_i$ für die p_i -Bewertung von n .
Sei p eine Primzahl, k , n und m beliebige Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Gilt $p^a | n$ und $p^{a+1} \not| n$ für eine Zahl a , so ist $a = v_p(n)$.

(b) $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$, $v_p(m^k) = k v_p(m)$

(c) Ist $v_p(m) \neq v_p(n)$, so ist $v_p(m+n) = \min(v_p(m), v_p(n))$. Zeigen Sie, dass das für $v_p(m) = v_p(n)$ nicht immer gilt.

(d) $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$

Aufgabe 5 (IST): Verallgemeinerter ggT und kgV (1+2+1+2 = 6 Punkte)
In der Vorlesung wurde der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ von zwei Zahlen a und b definiert als die größte Zahl, die a und b teilt. Analog wurde $\mathrm{kgV}(a, b)$ als die kleinste Zahl, die von a und b geteilt wird, definiert. Wir definieren nun die Verallgemeinerung für drei Zahlen a , b und c . $\mathrm{ggT}(a, b, c)$ sei definiert als die größte Zahl, die a , b und c teilt; $\mathrm{kgV}(a, b, c)$ sei definiert als die kleinste Zahl, die von a , b und c geteilt wird. Seien a , b und c im Folgenden drei beliebige Zahlen.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{ggT}(a, b, c) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c)$ und $\mathrm{kgV}(a, b, c) = \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a, b), c)$.

(b) Zeigen Sie: Es existieren $x, y, z \in \mathbb{Z}$, sodass $\mathrm{ggT}(a, b, c) = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c$.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(252, 378, 168)$.

(d) Berechnen Sie $x, y, z \in \mathbb{Z}$, sodass $\mathrm{ggT}(252, 378, 168) = 252 \cdot x + 378 \cdot y + 168 \cdot z$.