I. Bouw
F. Kiraly

24.04.2008
SS 2008

Übungen zur elementaren Zahlentheorie - Blatt 2

Abgabe am 05.05.2008 vor den Übungen

Aufgabe 6: Rechnen modulo n (1+2+2 = 5 P)
Sei n eine positive ganze Zahl. Berechnen Sie (einen Repräsentanten im kanonischen Restesystem):

(a) $(n^3 + n + 2)(n^5 + 8n^2 + 3)(n^4 + 7) \bmod n$

(b) die letzte Stelle von Googol im Hexadezimalsystem ($10^{100} \bmod 16$)

Zeigen Sie:

(c) Die Zahl $n^7 - n$ ist durch 42 teilbar.

Aufgabe 7: Lineare Kongruenzen (LA: 1+1+0+2 = 4 P; IST: 1+1+2+0 = 4 P)
Bestimmen Sie die Lösungmenge folgender Gleichungen in x ($x \in \mathbb{Z}$).

(a) $2x \equiv 4 \bmod 7$

(b) $4x + 2 \equiv 8 \bmod 16$

(c) $21x + 5 \equiv -3x + 2 \bmod 15$

(d) $(n!)x = p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor + 1} \bmod p^n$ für beliebige Zahlen n und Primzahlen p

Tipp zu (d): Benutzen Sie Aufgabe 4 (d).

Aufgabe 8: Textaufgaben (2+2 = 4 Punkte)

(a) Nehmen wir an, Sie möchten für insgesamt 3,25 Euro Beeren des Solanum lycopersicum (Stk 0,25 Euro) und Sprossknollen des Solanum tuberosum (Stk 0,35 Euro) kaufen. Geben Sie sämtliche Möglichkeiten an, all Ihr Geld auszugeben.

(b) Sie haben $n \in \mathbb{Z}$ Eimer mit Nummern $1 \leq i \leq n$ mit ganzzahligen positiven Fassungsvolumina V_i in Litern. Welche Volumina können Sie mit diesen Eimern abmessen, ohne das Gewicht, die Form der Eimer oder andere Parameter außer dem Fassungsvolumen auszunutzen? Sie dürfen z.B. umfüllen und Flüssigkeit wegkippen.
Anleitung: Versuchen Sie zunächst, mit einem 6- und einem 8-Liter-Eimer 2 Liter abzumessen, dann 3 Liter. Was hat das mit Kongruenzen und Modulorechnung zu tun?

Aufgabe 9: Freitag der Dreizehnte (1+2 = 3 Punkte)

(a) In der Vorlesung wurde gezeigt: Es gibt pro Jahr höchstens drei und mindestens einen Freitag den Dreizehnten. Zeigen Sie, dass die obere Schranke angenommen wird, indem Sie die genaue Anzahl für 2009 berechnen.

(b) Geben Sie eine ungefähre Abschätzung für die Freitäge die Dreizehnten an, die Sie noch erleben werden. Sie haben circa 60 Jahre Restlebenswerwartung.

Man kann übrigens zeigen, dass (nach dem Gregorianischen Kalender) der 13. eines Monats öfter an einem Freitag ist als an jedem anderen Wochentag.

Aufgabe 10: Weltuntergang (2+2 = 4 Punkte)
Im Laufe der Weltgeschichte haben prominente Personen immer wieder den Weltuntergang vorhergesagt. Berechnen Sie für zwei der folgenden Weltuntergangstermine Ihrer Wahl den Wochentag nach dem jeweils gültigen zentraleuropäischen Kalender. Beachten Sie: Der Gregorianische Kalender wurde 1582 durch die päpstliche Bulle "Inter Gravissimas" eingeführt.

(a) 31. Dezember 999, vorhergesagt von Papst Sylvester I. Nachdem der Weltuntergang nicht eintrat, wurde der 31. Dezember zu Ehren der Person benannt, deren Gebete den Untergang offensichtlich abgewendet hatten.

(b) 21. März 1844, vorhergesagt von Rev. William Miller, dem Begründer der Adventisten. Tags darauf verkündete er, er hätte die Wiederkunft Christi eigentlich im übertragenen Sinne vorhergesagt.

(c) 30. Mai 2008, nach einem populären Schlager des Golgowski-Quartetts.

(d) 21. Dezember 2012, nach mehreren Verschwörungstheoretikern, Mystikern und Pseudowissenschaftlern. An diesem Tag endet der momentane Zyklus im Maya-Kalender, außerdem soll nach dem Bestseller "Der Bibel-Code" ein Komet auf der Erde einschlagen. Man kann sich also auf den 22. freuen.