http://www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/bouw/ss09/algebra2.html

23.04.2009

I. Bouw
S. Wilke

Übungen zur Algebra II - SS09
Blatt 1

Abgabe ist Donnerstag, den 30.04.2009, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Einheiten in quadratischen Erweiterungen (2+2+2)
Sei $m \in \mathbb{Z}$ quadratfrei; d.h. für alle Primzahlen p mit $p|m$ gilt $p^2 \not| m$. Definiere

$$R = \mathbb{Z}[\sqrt{m}] := \mathbb{Z}[X]/(X^2 - m).$$

Die *Norm* von R über $\mathbb{Z}$ ist dann die Abbildung

$$N : \begin{cases} R & \to & \mathbb{Z}, \\ a + b\sqrt{m} & \mapsto & (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, $N(0) = 0$, $N(1) = 1$

(b) Zeigen Sie: $x \in R^\times$ genau dann, wenn $N(x) = \pm 1$.

(c) Bestimmen Sie $R^\times$ im Fall $m < 0$.

Aufgabe 2: (2+2+2)
Analog zu Aufgabe 1 sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Definiere

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] & \to & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{-5} & \mapsto & \overline{a + b} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: φ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

(b) Zeigen Sie: $\operatorname{Kern} \varphi = (3, 1 - \sqrt{-5})$.

(c) Zeigen Sie: $\operatorname{Kern} \varphi$ ist kein Hauptideal.
Hinweis: Berechnen Sie $N(3)$ bzw. $N(1 - \sqrt{-5})$. Benutzen Sie dann Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Der Chinesische Restsatz - Revisited (2+2)

(a) Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen:

$$\begin{cases} x \equiv & -1 & \mod 7 \\ x \equiv & 2 & \mod 11 \\ x \equiv & 1 & \mod 13 \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie:

$$\mathbb{R}[X]/(X^4 - 1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$