30.04.2009

I. Bouw
S. Wilke

Übungen zur Algebra II - SS09
Blatt 2

Abgabe ist Donnerstag, den 07.05.2009, vor der Übung

Aufgabe 1: Funktionen auf der Kreislinie (2+2+2)
Sei $R := \mathbb{R}[X,Y]/I$, wobei $I = (X^2 + Y^2 - 1)$. Sei $x := \overline{X}$, $y := \overline{Y}$.

(a) Zeigen Sie: $(x-1)$, $(y-1)$ sind keine Primideale.

(b) Zeigen Sie: Für $|a| > 1$ sind $(x-a)$ bzw. $(y-a)$ maximale Ideale von R.

(c) Zeigen Sie: $(x-a, y-b)$ ist genau dann ein maximales Ideal von R, wenn $a^2 + b^2 = 1$.

Machen Sie sich klar, dass der Ring R alle Polynome auf der Kreislinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ beschreibt.

Aufgabe 2: Faktorisierung von Polynomen (2+2+2+2)
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Polynome irreduzibel sind. Zerlegen Sie sie gegebenenfalls in irreduzible Faktoren.

(a) $Y^4 + X^2 + 1$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$

(b) $Y^4 + X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_2[X,Y]$

(c) $X^3 - X^2Y - XY + Y^2$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$

(d) $Y^n - 42X^m$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$, $n, m \geqslant 1$

Aufgabe 3: Radikalerweiterungen von $K(X)$ (2)
Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Zeigen Sie: $K(X)(\sqrt[n]{f})$ ist eine Körpererweiterung von $K(X)$ vom Grad n.
Hinweis: Was ist das Minimalpolynom von $\sqrt[n]{f}$?