07.05.2009

I. Bouw
S. Wilke

Übungen zur Algebra II - SS09
Blatt 3

Abgabe ist Donnerstag, den 14.05.2009, vor der Übung

Aufgabe 1: Euklidischer Algorithmus in $\mathbb{Z}[i]$ $(2+2)$

(a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $12+i$ und $8-i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Zeigen Sie: $8+9i$, $14+5i$ sind in $\mathbb{Z}[i]$ teilerfremd.
Hinweis: Sie müssen dazu den euklidischen Algorithmus nicht durchführen!

Aufgabe 2: Nicht-faktorielle quadratische Ringerweiterungen $(2+2)$
Sei $m \geqslant 5$ quadratfrei, und sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$.

(a) Zeigen Sie: 2, $\sqrt{-m}$, $1+\sqrt{-m}$ sind irreduzibel in R.

(b) Zeigen Sie: R ist nicht faktoriell.
Hinweis: Zeigen Sie: Entweder $\sqrt{-m}$ oder $1+\sqrt{-m}$ ist kein Primelement in R.

Aufgabe 3: Ein nicht-euklidischer Ring $(2+2+2+3^*+2)$
Sei $\gamma = \frac{1}{2}(1+\sqrt{-19})$, und sei $R = \mathbb{Z}[\gamma] = \{a+b\gamma\ ;\ a,b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Definiere

$$N : R \to \mathbb{Z}, \quad a+b\gamma \mapsto (a+b\gamma)(a+b\bar{\gamma}),$$

wobei $\bar{\gamma} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{-19})$ ist.

(a) Zeigen Sie: $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, $R^\times = \{\pm 1\}$.

(b) Berechnen Sie γ^2 und finden Sie das Minimalpolynom von γ über $\mathbb{Q}$.

(c) Zeigen Sie: Es gibt keinen surjektiven Ringhomomorphismus φ von R nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Hinweis: Betrachten Sie $\varphi(\gamma)$.

(d) Sei $g : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, so dass für alle $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ ein $r \in R$ existiert, so dass

$$a = qb + r, \quad r = 0 \text{ oder } g(r) < g(b).$$

Sei $b_0 \in R \setminus \{0, \pm 1\}$ mit $g(b_0)$ minimal. Zeigen Sie: Für alle $a \in R$ existiert ein $r \in \setminus\{0, \pm 1\}$ mit $a \equiv r \mod Rb_0$.

(e) Zeigen Sie, dass R kein euklidischer Ring ist.
Hinweis: Konstruieren Sie aus (c) und (d) einen Widerspruch.

Hinweis: Aufgabe 1 von Blatt 1 wird Ihnen bei Aufgabe 1 und Aufgabe 2 auf diesem Blatt weiterhelfen!