14.05.2009

I. Bouw
S. Wilke

Übungen zur Algebra II - SS09
Blatt 4

Abgabe ist Donnerstag, den 28.05.2009, vor der Übung

Aufgabe 1: Summe von zwei Quadraten (2)
Finden Sie alle Darstellungen von 2210 als Summe von zwei Quadraten.

Aufgabe 2: Grundeinheiten und die Pell'sche Gleichung $(2+2+2)$
Sei $d > 1$ quadratfrei, $d \equiv 2, 3 \mod 4$, und sei $\mathcal{O}_d$ der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(a) Sei $\varepsilon \neq \pm 1$ eine Einheit in $\mathcal{O}_d$. Zeigen Sie: Es gibt unendliche viele Einheiten.
Hinweis: Betrachten Sie ε^j für $j \in \mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq \pm 1$ für $d = 3, 6, 7$ mit $\varepsilon_2 \neq \pm\varepsilon_1^{\pm 1}$.

(c) Betrachte die *Pell'sche Gleichung*

$$x^2 - dy^2 = \pm 1. \qquad (*)$$

Sei (x_1, y_1) eine Lösung von (*) mit $y_1 \neq 0$. Setze $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Definiere (x_{n+1}, y_{n+1}) über die Iteration

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: (x_{n+1}, y_{n+1}) ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung von (*).
Hinweis: Was hat die Pell'sche Gleichung (*) mit (a) und (b) zu tun?

Aufgabe 3: Primelemente in $\mathcal{O}_{-3}$ $(2+2+2+2)$
Sei $\mathcal{O}_{-3}$ der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Sei weiter $p \neq 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei ζ_3 eine primitive dritte Einheitswurzel. Dann ist $\mathcal{O}_{-3} = \mathbb{Z}[\zeta_3]$.

(b) Das Polynom $f := X^2 + X + 1$ hat genau dann eine Nullstelle in $\mathbb{F}_p$, wenn $p \equiv 1 \mod 3$ ist.

(c) (p) ist genau dann ein Primideal von $\mathcal{O}_{-3}$, wenn $p \equiv -1 \mod 3$ ist.

(d) p ist genau dann Produkt von irreduziblen Elementen in $\mathcal{O}_{-3}$, wenn $p = a^2 - ab + b^2$ für gewisse Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\mathcal{O}_{-3}$ faktoriell ist.