28.05.2009

I. Bouw
S. Wilke

Übungen zur Algebra II - SS09
Blatt 5

Abgabe ist *Dienstag*, den 16.06.2009, vor der Übung

Aufgabe 1: Zerlegung in $\mathcal{O}_{-6}$ $(2+2+2)$
Sei $R := \mathcal{O}_{-6}$.

(a) Zeigen Sie: Die *Gitter* $\mathfrak{p} := \langle 2, \sqrt{-6} \rangle$, $\mathfrak{q} := \langle 3, \sqrt{-6} \rangle$ sind Primideale in R.
Hinweis: Sie müssen zunächst zeigen, dass $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ tatsächlich Ideale sind!

(b) Zerlegen Sie das Hauptideal (6) in R explizit in Primideale.

(c) Zeigen Sie: Die Idealklassen $[\mathfrak{p}]$ und $[\mathfrak{q}]$ stimmen überein. Zeichnen Sie die Gitter $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ und deuten Sie die Aussage geometrisch.

Aufgabe 2: (2)
Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Betrachte das Ideal $\mathfrak{a} := (2, 1+\sqrt{-3})$.
Zeigen Sie: $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ ist kein Hauptideal. Widerspricht dies dem Lemma aus der Vorlesung?

Aufgabe 3: $(2+2)$
Sei $d < 0$ quadratfrei, $d \equiv 1 \mod 4$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{O}_d$ ein Hauptidealring ist.

(a) Zeigen Sie: Alle Primzahlen $p < \frac{1}{4}(1-d)$ sind träge.

(b) Zeigen Sie: Für $m = 2, 3, 5, 11, 17, 41$ und alle $x = 0, \ldots, m-1$ ist $x^2 - x + m$ eine Primzahl.

Hinweis: $\mathcal{O}_d$ mit $d < 0$, $d \equiv 1 \mod 4$ ist genau dann ein Hauptidealring, wenn $d = -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$.

Aufgabe 4: Verzweigung $(2+2)$
Sei $d < 0$ quadratfrei.

(a) $p = 2$ ist genau dann verzweigt in $\mathcal{O}_d$, wenn $d \equiv 1 \mod 4$.

(b) Eine Primzahl $p > 2$ ist genau dann verzweigt in $\mathcal{O}_d$, wenn $p | d$.