

# Höhere Mathematik für Physiker und Ingenieure

Prof. Dr. Irene Bouw  
Dr. Urs Hackstein

Blatt 14

Abgabe: 7.2.2008 vor der Übung.

**Aufgabe 1.** (2+2+2+2=8P) Man betrachte die durch

$$x(t) = 2 \cos(t)(1 + \cos(t))$$

und

$$y(t) = 2 \sin(t)(1 - \cos(t))$$

für  $t \in [0, 2\pi]$  gegebene Kurve.

- Skizzieren Sie die Kurve. (Sie dürfen hier auch MAPLE benutzen.)
- Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve. Wo ist die Krümmung nicht definiert?
- Wann wird die Krümmung Null, wann wird sie extremal?
- Wo ist die Kurve konvex oder konkav?

Erläutern Sie die Ergebnisse in (b) – (d) auch anhand der Skizze.

**Aufgabe 2.** (2+1=3P)

Die Funktion  $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $f(x) = \sin x$ .

- Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen des entstehenden Rotationskörpers bei Rotation um die  $x$ -Achse.  
Tipp: Zeigen Sie, dass  $\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} (t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh}(t)) + C$  gilt. Alternativ kann man dieses Integral auch mittels der Substitution  $t = \sinh(u)$  berechnen.
- Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers bei Rotation um die  $y$ -Achse.

**Aufgabe 3.** (2+2+1=5P)

- Die Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch  $f(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$  mit beliebigen Koeffizienten  $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  definiert. Berechnen Sie mittels der Simpson-Regel eine Näherung für das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  und vergleichen Sie dies mit dem exakten Wert des Integrals. Gilt dies auch für Polynome von höherem Grad?

- (b) Das Intervall  $[a, b]$  werde nun in  $2m$  Teilintervalle gleicher Länge aufgeteilt. Als Stützstellen verwenden wir also die Stellen  $x_i = a + ih$  mit  $h = \frac{b-a}{2m}$  und  $i \in \{0, \dots, 2m\}$ . Zeigen Sie, dass man durch Anwendung der Simpson-Regel jeweils auf die einzelnen Teilintervalle  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$  mit  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  die folgende Näherungsformel erhält:

$$T_{2m} = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}))$$

Achtung: Erklären Sie die einzelnen Schritte Ihrer Argumentation sorgfältig und präzise. Erläutern Sie anhand von Skizzen, welche Flächen Sie addieren.

- (c) Approximieren Sie das Integral  $\int_0^1 x^3 \sqrt{x} dx$  nach der Simpson-Methode jeweils für die Schrittweiten  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$  bzw.  $\frac{1}{32}$ . Sie dürfen hier auch ein MAPLE-worksheet einreichen.

#### Aufgabe 4. (2+2=4P)

- (a) Aus der Physik wissen Sie, dass auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$  auf einen Massepunkt der Masse  $m$  stets die Zentrifugalkraft  $F_Z = \frac{mv^2}{r}$  wirkt. Leiten Sie eine Formel für die Zentrifugalbeschleunigung  $a_Z(x)$  her, die auf ein Auto der Masse  $m$  wirkt, das auf einer Landstraße eine Linkskurve gerade im Punkt  $x$  durchfährt, in Abhängigkeit von der Krümmung  $\kappa(x)$  der Kurve im Punkt  $x$ .  
Hinweis: Sie dürfen bei Ihrer Rechnung annehmen, dass das Auto sich lokal bei  $x$  auf einer Kreisbahn der Krümmung  $\kappa(x)$  befindet.
- (b) Die von uns betrachtete Kurve habe die maximale Krümmung  $0,04m^{-1}$  und minimale Krümmung  $0,02m^{-1}$ . Aus Erfahrung weiss man, dass sich ein Auto ab einer Zentrifugalbeschleunigung von  $6m/s^2$  nicht mehr sicher durch eine Kurve lenken lässt. Welche Geschwindigkeitsbegrenzung muss man daher zur Sicherheit aller Verkehrsteilnehmer auf diesem Streckenabschnitt einführen?  
Diese Aufgabe ist ausschließlich mit theoretischen Mitteln zu lösen.