Höhere Mathematik für Physiker und Ingenieure

Prof. Dr. Irene Bouw
Dr. Urs Hackstein

Blatt 15

Abgabe: freiwillig, 14.2.2008 vor der Übung.

Dieses Blatt ist ein Bonusblatt, dessen Abgabe freiwillig ist, auf dem Sie aber noch fehlende Punkte sammeln können. Für die Bestimmung der Zulassungsgrenze von 50% werden die Blätter 1-14 herangezogen. Die Grenze liegt daher bei 131 Punkten.

Aufgabe 1. (1+1=2P) Wir betrachten einen Würfel mit Kantenlänge 2 und Schwerpunkt im Koordinatenursprung. In diesen Würfel können wir einen Tetraeder einbeschreiben, dessen vier Eckpunkte ebenfalls Ecken des Würfels sind und dessen sechs Kanten die Diagonalen der Würfelflächen sind. Wir legen zudem fest, dass die Ecke des Würfels vorne rechts unten eine der Ecken des Teteraeders ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Tetraeders in

(a) kartesischen Koordinaten (Tipp: Bild!)

(b) in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 2. (1+1+2+2=6P) Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $x \mapsto \frac{1}{\cosh(x)}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass f überall streng monoton fallend ist und bestimmen Sie $f([0,\infty))$.

(b) Folgern Sie daraus, dass f eine Umkehrfunktion $g\colon D \to [0,\infty)$ besitzt, wobei D der größtmögliche Definitionsbereich sei.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion mit Hilfe der dazugehörigen Formel. Vereinfachen Sie den entstehenden Ausdruck so weit wie möglich.

(d) Berechnen Sie $\int_0^1 g(y)\,dy$. Tipp: Benutzen Sie partielle Integration und (c).

Aufgabe 3. (1+2+2+1+1=7P) Untersuchen Sie die angegebenen Folgen und Reihen auf Konvergenz. Überprüfen Sie alle außer der Reihe in (b) auch auf absolute Konvergenz.

(a) $a_n = (-1)^n \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^4+1}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\binom{n}{3}}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!2^n}$

Aufgabe 4. (1+2+2=5P)

(a) Berechnen Sie $\int t^2 \cos t \, dt$.

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\arcsin x)^2}}$.

(c) Für welche $p > -1$ konvergiert das Integral $\int\limits_{1}^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2p} - \frac{p}{x+1} \right) dx$?