Höhere Mathematik für Physiker und Ingenieure

Prof. Dr. Irene Bouw
Dr. Urs Hackstein

Probeklausur

Abgabe: 10.1.2008 vor der Übung.

Die Abgabe der Probeklausur ist freiwillig und geschieht einzeln. Die Punkte zählen insbesondere nicht mit für die Zulassung zur Klausur. Wenn Sie die Aufgaben unter Klausurbedingungen bearbeiten möchten, so nehmen Sie sich zwei Stunden Zeit und benutzen als Hilfsmittel nur einen Zettel (Din A4, doppelseitig) mit handgeschriebenen Notizen. Jede Teilaufgabe wird mit 5 Punkten bewertet. Insgesamt sind folglich 80 Punkte zu erreichen.

Beachten Sie ferner, dass die hier gestellten Aufgaben in Form und Länge mit denen in einer Klausur übereinstimmen, aber nur die bislang behandelten Kapitel 1-3 abdecken.

Aufgabe 1. (a) Schreiben Sie $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ in Polarkoordinaten.

Lösung: Es sei $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. *Dann gilt:*

- $|\alpha| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$
- *Es gilt* $\arctan(-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.
  Daraus folgt $\arg(\alpha) \equiv -\frac{1}{3}(\operatorname{mod} \pi)$. *Weil* $\cos x < 0$ *für* $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ *gilt, folgt* $\arg(\alpha) = \frac{2}{3}\pi$.

Also gilt: $\alpha = e^{\frac{2}{3}\pi i}$

(b) Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^6 = \alpha$.

Lösung: Nach der Vorlesung gilt $z^6 = \alpha$ *genau dann, wenn*

$$z = e^{i\frac{\pi}{9} + 2\pi\frac{k}{6}i} = e^{i\frac{\pi}{9} + \pi\frac{k}{3}i}$$

für ein $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *gilt.*

Aufgabe 2. (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

Lösung:Mittels elementarer Zeilenumformungen lässt sich die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ *wie folgt auf Zeilenstufenform bringen:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$$

Also ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ *genau dann invertierbar, wenn* $3-a \neq 0$ *ist, also wenn* $a \neq 3$ *ist.*
Alternativ können Sie auch die Determinante der Matrix A_a *bestimmen.* A_a *ist dann genau dann invertierbar, wenn* $det(A_a) \neq 0$ *ist.*

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A_a x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:Mittels elementarer Zeilenumformungen erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 3-a \end{array}\right)$$

Ist $a \neq 3$*, so erhält man also* $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *als eindeutige Lösung des Gleichungssystems* $A_a x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ist $a = 3$ *gilt, so sind genau alle* $x \in \mathbb{R}^3$ *der Gestalt* $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ *mit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *Lösungen des Gleichungssystems.*

(c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: Laplace-Entwicklung nach der vierten Zeile liefert:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^7 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(-2-4) = -(-6) = 6$$

Aufgabe 3. (a) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k^k}$? Konvergiert die Reihe absolut?

Lösung: Es sei $a_k := (-1)^k \frac{k!}{k^k}$*. Dann gilt für* $k \geq 2$*:*

$$|a_k| = \frac{k!}{k^k} = \frac{k}{k} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k} \leq 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{2}{k^2}$$

Also ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ *eine Majorante der Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k^k}$*. Da die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ *konvergiert, ist nach dem Majorantenkriterium die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k^k}$ *absolut konvergent, insbesondere also konvergent.*

(b) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$? Konvergiert die Reihe absolut?

Lösung:

(i) Es sei $a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ *und* $b_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$*. Dann gilt* $a_n = (-1)^n b_n$*. Außerdem gilt* $b_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}$ *und daher* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$*. Die Folge* $(b_n)_n$ *ist also eine Nullfolge.*

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$ *gilt also* $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$*, d. h. die Folge* $(b_n)_n$ *ist monoton fallend, insgesamt somit eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert also die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$*.*

(ii) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ *konvergiert nach Definition genau dann absolut, wenn die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$ *konvergiert. Da* $\frac{n+1}{n} > 1$ *und damit* $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 1$ *jeweils für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, ist*

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} > \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Da die harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *divergiert, ist somit die harmonische Reihe eine divergente Minorante der Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$*, so dass diese nach dem Minorantenkriterium ebenfalls divergiert. Also konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ *nicht absolut.*

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$?

Lösung: Es sei $a_n = n^2$. Dann gilt:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

und also $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ besitzt also den Konvergenzradius 1. Also konvergiert sie absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$.
Für die Punkte auf dem Rand des Konvergenzbereichs ist mit unseren Mitteln keine allgemeine Aussage möglich. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ offensichtlich divergiert, können wir allerdings nachweisen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ in diesen Punkten zumindest nicht absolut konvergiert.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für alle $n \geq 1$ gilt!

Lösung: Behauptung: Für alle $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
Beweis: Für alle $n \geq 1$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$\square$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int \mathrm{Arcosh}(x)dx$

Lösung: Mittels der Substitution $x = \cosh(y) \Leftrightarrow y = \mathrm{Arcosh}(x)$ und anschließender partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{Arcosh}(x)dx &= \int y \sinh(y)dy = y\cosh(y) - \int \cosh(y)dy \\
&= y\cosh(y) - \sinh(y) + C = x\,\mathrm{Arcosh}(x) - \sinh(\mathrm{Arcosh}(x)) + C \\
&= x\,\mathrm{Arcosh}(x) - \sinh(\log(x+\sqrt{x^2-1})) + C \\
&= x\,\mathrm{Arcosh}(x) - \frac{e^{\log(x+\sqrt{x^2-1})} - e^{-\log(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} + C \\
&= x\,\mathrm{Arcosh}(x) - \frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}) + C \\
&= x\,\mathrm{Arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + C
\end{aligned}$$

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$
Lösung: Mittels partieller Integration erhält man:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - [-\log(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

(c) $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} dx$
Lösung: Wir faktorisieren den Nenner des Integranden zu

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1).$$

Der Partialbruchzerlegungsansatz

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}$$

führt auf das Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{c} A+C=1 \\ B-A=1 \\ 1-B=0 \end{array} \right\}$ *und also* $A=0$ *und* $B=C=1$. *Das Integral* $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} dx$ *berechnet sich daher wie folgt:*

$$\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x} dx = \log|x-1| + \arctan x + C$$

Aufgabe 6. Konvergieren die folgenden Folgen? Falls ja, so berechnen Sie ihren Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{n^3+(-1)^n}{n^3-2n+1}$
Lösung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $a_{2n} = \frac{n^3+1}{n^3-2n+1}$ *und* $a_{2n+1} = \frac{n^3-1}{n^3-2n+1}$. *Beide Teilfolgen konvergieren gegen 1, genauso jede beliebige Teilfolge, so dass die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen 1 konvergiert.*

(b) $b_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
Lösung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$b_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Also konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen Null.*

Aufgabe 7. (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom zu der homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$$

ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass daher die allgemeine Lösung dieser DGL durch

$$x(t) = e^{2t}(C_1 + C_2 t)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ *gegeben ist. Aus den Anfangswerten* $x(0) = 1$ *und* $x'(0) = -1$ *erhält man wegen* $x'(t) = e^{2t}C_2 + 2e^{2t}(C_1 + C_2 t)$ *das Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{c} 1 = C_1 \\ -1 = C_2 + 2C_1 \end{array} \right\}$*. Dessen Lösung ergibt sich zu* $C_1 = 1$ *und* $C_2 = -3$*. Die gesuchte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems ist also*

$$x(t) = e^{2t}(1 - 3t).$$

(b) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = e^{-t}.$$

Lösung: Wir bestimmen eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = e^{-x}.$$

Dazu versuchen wir den Ansatz $x(t) = Ae^{-t}$*. Dann gilt:* $x'(t) = -Ae^{-t}$ *und* $x''(t) = Ae^{-t}$*. Also folgt*

$$e^{-t} = Ae^{-t} + 4Ae^{-t} + 4Ae^{-t} = 9Ae^{-t}$$

und damit $A = \frac{1}{9}$*. Also ist* $x(t) = \frac{1}{9}e^{-t}$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL und dessen allgemeine Lösung ist*

$$x(t) = \frac{1}{9}e^{-t} + e^{2t}(C_1 + C_2 t)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$*.*