Höhere Mathematik III für Elektrotechniker: Klausur

Zeit: 13.3.2009 9:00 - 11:00

Prof. Dr. Irene Bouw
Sophie Schmieg

Aufgabe 1. (5 P) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an. Ist die Matrix diagonalisierbar?

Aufgabe 2. (5 P) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. (5 P) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + z \\ y - x - 2z \end{pmatrix} .$$

Geben Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Standardbasis an. Berechnen Sie die Dimensions des Kerns der Abbildung.

Aufgabe 4. (5 P) Berechnen Sie den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} x' &= 2y - x \\ y' &= x \end{cases} .$$

Aufgabe 5. (10 P) Sei

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 7\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2$$

(a) Schreiben Sie die quadratische Form q als Matrixform

$$q(x) = x^t A x + b^t x + c$$

und geben Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A an.

(b) Berechnen Sie die Normalform der Quadrik und skizzieren Sie die Nullstellenmenge. Geben Sie auch den Typ der Quadrik an.

Bitte wenden!

Aufgabe 6. (10 P) Es sei

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xe^z + 4xy^3 \\ 6x^2y^2 \\ x^2e^z + 3z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass v ein auf ganz $\mathbb{R}^3$ konservatives Vektorfeld ist. Berechnen Sie eine Stammfunktion von v

(b) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma v \cdot dx$$

mit dem Weg

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3 \; ; \; t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7. (5 P) Es sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 + y^2 = z^2 \; ; \; 1 \leq z \leq 2\}$ die Mantelfläche eines Kegelstumpfes. Berechnen Sie die Oberfläche von K.

Aufgabe 8. (5 P) Es sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Kugeloberfläche und

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie

$$\iint_S v \cdot dO \quad .$$

Aufgabe 9. (10 P) Es sei

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + 9y^2 \leq 9, y \geq x\} \quad .$$

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D mit Hilfe des Satzes von Green.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformation.