Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Prof. Dr. Irene Bouw
Dr. Urs Hackstein, Sophie Schmieg

1.Kurzklausur

Aufgabe 1. (2+3=5P)

Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Desweiteren sei die Abbildung $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ durch

$$T(f)(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.
Lösung: Dies ist Aufgabe 1(a) in

$$http://www.math.uni-duesseldorf.de/\tilde{}ag/LA1\_SS06/probesol.pdf.$$

(b) Bestimmen Sie jeweils die Dimension von $\ker T$ und $\operatorname{Im} T$.
Lösung: Dies ist Aufgabe 1(b) in

$$http://www.math.uni-duesseldorf.de/\tilde{}ag/LA1\_SS06/probesol.pdf.$$

Aufgabe 2. (2+3=5P)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 16 & 1 & 6 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
Lösung: Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & -2 \\ 16 & 1-t & 6 \\ -6 & 2 & 2-t \end{pmatrix} \underset{ZIII+2ZI}{\overset{ZII+ZI}{=}} \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & -2 \\ 17-t & -t & 4 \\ -4-2t & 0 & -2-t \end{pmatrix} \\
&= (2+t) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & -2 \\ 17-t & -t & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{SI-2SIII}{=} (2+t) \det \begin{pmatrix} 5-t & -1 & -2 \\ 9-t & -t & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -(t+2) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-t & -1 \\ 9-t & -t \end{pmatrix} = -(t+2)(t^2-5t+9-t) = -(t+2)(t^2-6t+9) \\
&= -(t+2)(t-3)^2 = -(t^3-4t^2-3t+18)
\end{aligned}$$

Berechnet man das charakteristische Polynom auf andere Weise, so muss man eine Nullstelle erraten, Polynomdivision durchführen und das Restpolynom vom Grad 2 mit Mitternachtsformel, quadratischer Ergänzung oder Ähnlichem faktorisieren.
Die Eigenwerte sind also -2 *(einfach) und* $+3$ *(mehrfach).*

(b) Bestimmen Sie die Dimension der Eigenräume. Ist A reell diagonalisierbar?
Lösung: Es gilt $\dim \mathrm{E}(A,-2) = 1$*, da nur einfache Nullstelle im charakteristischen Polynom. Berechne* $\mathrm{E}(A,3)$*:*

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 16 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt $\dim \mathrm{E}(A,3) = \dim \mathrm{Ker}(A-3E) = 3 - \mathrm{Rg}(A-3E) = 3 - 2 = 1$*. Insbesondere ist* A *nicht diagonalisierbar, da hier die geometrische Vielfachheit echt kleiner ist als die algebraisch Vielfachheit.*