Seminar Algebra

LECTURES ON FORMS IN MANY VARIABLES
Funktionenkörper

Sommersemester 2005
Steffen Schölch
Universität Ulm
Stand: 17. Juli 2005

Funktionenkörper

Definition 1: Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt Funktionenkörper in j Variablen über einem Körper k, wenn gilt:
$\mathbb{K}$ ist eine endliche Erweiterung des Körpers der rationalen Funktionen in j Variablen über k.

Bemerkung: Eine hierzu äquivalente Bedingung ist:
$\mathbb{K}$ hat transzendenten Grad j über k und ist endlich erzeugt über k.
Beispiel: $\mathbb{K}$ ist entstanden aus k durch die Hinzunahme endlich vieler Elemente.

Ziel dieses Vortrages: In diesem Vortrag wollen wir das Theorem von Lang - Nagata beweisen, was besagt, dass mehrere Formen in einem C_i - Körper unter gewissen Bedingungen eine gemeinsame, nicht - triviale Null haben.
Ein weiteres Ziel wird sein, dass wir sehen, dass falls ein Körper $\mathbb{K}$ ein C_i - Körper ist und eine Erweiterung mit transzendentem Grad j hat, dass diese Erweiterung dann ein C_{i+j} - Körper ist.

Zunächst benötigen wir jedoch einige Vorarbeiten:

Definition 2: Es sei ϕ eine Form vom Grade d in n Variablen, mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{K}$. Wenn ϕ in $\mathbb{K}$ nur die triviale Null hat, und wenn $n = d^i$, dann nennt man ϕ eine Normform der Ordnung i.
Für den Fall $i = 1$ nennen wir ϕ einfach Normform.

Lemma 1: $\mathbb{K}$ sei ein Körper und habe eine endliche Erweiterung $\mathbb{E}$ vom Grade $e > 1$; dann ist die Norm von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{K}$ eine Normform vom Grade e.

Beweis: Wir definieren uns:

$$N(X), \quad X \in \mathbb{E}$$

als die Determinante der linearen Transformation 'Multiplikation mit X' auf $\mathbb{E}$. Wenn wir uns dann eine Basis für $\mathbb{E}$ in einem Vektorraum über $\mathbb{K}$ gewählt haben, wird $N(X)$ eine Form vom Grade e. Da $N(X) \neq 0$ für $X \neq 0$ ist dieses eine Normform.

Bemerkung: In diesem Lemma sehen wir, dass die Ungleichung $n > d$ in Chevalley´s Theorem (vgl. den Vortrag über endliche Körper) nicht verbessert werden kann.

Lemma 2: Wenn $\mathbb{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen ist, dann erlaubt $\mathbb{K}$ Normformen von beliebig großem Grad.

Bemerkung: Hier möchte ich noch kurz darauf hinweisen, dass dieses Lemma keine direkte Konsequenz des vorherigen Lemmas ist, da $\mathbb{K}$ nicht notwendigerweise Erweiterungen von beliebig großem Grad erlaubt.
Als Beispiel wähle man für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; welche nur eine Erweiterung vom Grade 2 hat ($\rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$). Trotzdem ist das Lemma offensichtlich richtig für die reellen Zahlen. Das Theorem von Artin - Schreier besagt hierzu, dass ein Körper wie die reellen Zahlen der Einzige ist, deren algebraischer Abschluss eine endliche Erweiterung ist.

Beweis: Wir führen einen Beweis, der ohne Artin - Schreier auskommt:
ϕ sei eine Normform vom Grade e. Weiter sei:

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)} &= \phi(\phi|\phi|\dots|\phi) \\
\phi^{(2)} &= \phi^{(1)}(\phi|\phi|\dots|\phi) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hier substituieren wir die Form ϕ durch sich selbst in jeder Variablen und die einzelnen slashes (|) zeigen an, dass jedes neue ϕ neue Variablen hat. Damit ist $\phi^{(m)}$ sicherlich eine Normform mit Grad e^m.

Theorem 1: $\mathbb{K}$ sei algebraisch abgeschlossen. Weiter seien $f_1, \dots, f_r$ Formen in n Variablen über $\mathbb{K}$ und $n > r$.
Diese Formen haben dann eine gemeinsame nicht - triviale Null in $\mathbb{K}$.

Beweis: (geometrischer Beweis) Die Menge der Nullen der Formen f_k in projektiven $(n-1)$ - Räumen über $\mathbb{K}$ bilden eine Hyperfläche H_j. Das Theorem besagt, dass der Durchschnitt $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_r$ nicht leer ist. Dies ist klar, wenn man sich einmal den 3 - dimensionalen Fall, in dem alle H_j linear sind, betrachtet: die Hyperflächen sind dann Ebenen durch den Ursprung; zwei dieser Ebenen haben dann sicherlich einen Schnitt.
Für den allgemeinen Fall verweise ich auf die analytische Geometrie und auf das Buch von Lang [2].

Theorem 2: Lang - Nagata Es sei $\mathbb{K}$ ein C_i - Körper. Es seien $f_1, \dots, f_r$ Formen in n Variablen vom Grad d.
Falls $n > rd^i$, dann haben diese Formen eine nicht triviale gemeinsame Null in $\mathbb{K}$.

Beweis: Für den Fall, dass $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, brauchen wir nichts zu zeigen, da dies das vorherige Theorem erfüllt.
Wir betrachten also nun den Fall, dass $\mathbb{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen ist:
Es sei ϕ eine Normform vom Grade $e \geq r$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)}(f) &= \phi(f_1, \dots, f_r|f_1, \dots, f_r|\dots|f_1, \dots, f_r|0, \dots, 0) \\
\phi^{(2)}(f) &= \phi^{(1)}(f_1, \dots, f_r|f_1, \dots, f_r|\dots|f_1, \dots, f_r|0, \dots, 0) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wir haben nach jedem Slash neue Variablen eingeführt und soviele wie möglich komplette Mengen der Formen f.
Wir betrachten uns nun den Fall $\underline{i = 1}$:
$\phi^{(1)}$ hat damit $n[\frac{e}{r}]$ Variablen und hat den Grad $de \leq dr([\frac{e}{r}]+1)$ (Hinweis: $[\dots]$ bezeichnet die Gauss - Klammer, also die größte ganze Zahl x mit $x \leq a$.) Da $\mathbb{K}$ ein C_1 - Körper ist, ergibt sich:

$$n\left[\frac{e}{r}\right] > dr\left(\left[\frac{e}{r}\right]+1\right)$$

oder

$$(n-dr)\left[\frac{e}{r}\right] > dr$$

Da aber nach Voraussetzung $(n - dr) > 0$ ist, ist dieser Ausdruck erfüllt für großes e. Damit hat $\phi^{(1)}$ eine nicht triviale Null, welche, da ϕ eine Normform ist eine gemeinsame Null für alle Formen f_j ist.
Nun betrachten wir den Fall: $\underline{i > 1}$:
$\phi^{(m)}$ hat den Grad

$$D_m = d^m e$$

und N_m bezeichne die Anzahl der Variablen von $\phi^{(m)}$. Dann ist

$$N_{m+1} = \left[\frac{N_m}{r}\right] n$$

Ziel: Wir wollen zeigen: $N_m > (D_m)^i$.
Zunächst benötigen wir einige Vorarbeiten: Zuerst lösen wir die Gauss - Klammer wie folgt auf:

$$\left[\frac{N_m}{r}\right] = \frac{N_m}{r} - \frac{t_m}{r} \qquad 0 \leq t_m < r.$$

Damit wollen wir nun unser Ziel wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{N_{m+1}}{(D_{m+1})^i} &= \frac{n\left[\frac{N_m}{r}\right]}{d^i (D_m)^i} \\
&= \frac{n}{rd^i}\frac{N_m}{(D_m)^i} - \frac{n}{rd^i}\frac{t_m}{e^i(d^i)^m} \\
&\geq \frac{n}{rd^i}\frac{N_m}{(D_m)^i} - \frac{n}{rd^i}\frac{r}{e^i(d^i)^m}
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung benutzen wir nun für $m, m-1, m-2, \ldots, 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{N_{m+1}}{(D_{m+1})^i} &\geq \left(\frac{n}{rd^i}\right)^2 \left(\frac{N_{m-1}}{(D_{m-1})^i} - \frac{r}{e^i(d^i)^{m-1}}\right) - \left(\frac{n}{rd^i}\right)\left(\frac{r}{e^i(d^i)^m}\right) \\
&\vdots \\
&\geq \left(\frac{n}{rd^i}\right)^m \frac{N_1}{(D_1)^i} - \frac{r}{e^i}\frac{n}{r}\frac{1}{(d^i)^{m+1}} \underbrace{\left(\left(\frac{n}{r}\right)^{m-1} + \left(\frac{n}{r}\right)^{m-2} + \cdots + 1\right)}_{\text{endl. geom. Reihe}} \\
&= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^m \frac{N_1}{(D_1)^i} - \frac{r}{e^i}\frac{n}{r}\frac{1}{(d^i)^{m+1}} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)^m - 1}{\left(\frac{n}{r}\right) - 1}
\end{aligned}$$

Aus dem vorherigen Teil für $i = 1$ wissen wir:

$$D_1 = de, \quad N_1 = n\left[\frac{e}{r}\right], \quad \left[\frac{e}{r}\right] = \frac{e}{r} - \frac{t}{r}, 0 \leq t < r$$

Mit einigen elementaren Umformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{N_{m+1}}{(D_{m+1})^i} &\geq \left(\frac{n}{rd^i}\right)^{m+1} \frac{e-t}{e^i} - \frac{r}{e^i}\frac{n}{r}\frac{1}{(d^i)^{m+1}}\frac{r(n^m - r^m)}{r^m(n-r)} \\
&= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^{m+1} \frac{e-t}{e^i} - \frac{r}{e^i}\frac{n}{rd^i}\frac{r}{n-r}\left(\left(\frac{n}{rd^i}\right)^m - \frac{1}{(d^i)^m}\right) \\
&= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^{m+1} \left(\frac{e-t}{e^i} - \frac{r^2}{e^i(n-r)}\right) + \frac{1}{(d^i)^m}\left(\frac{rn}{e^i d^i (n-r)}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{n}{rd^i}\right)^{m+1} \left(\frac{(n-r)(e-t) - r^2}{e^i(n-r)}\right)}_{A} + \underbrace{\frac{1}{(d^i)^m}\left(\frac{rn}{e^i d^i (n-r)}\right)}_{B}
\end{aligned}$$

Weil e so groß gewählt werden kann, dass

$$(n-r)(e-t) - r^2 > 0$$

und da

$$\left(\frac{n}{rd^i}\right) > 0$$

konvergiert $A \to \infty$ für $m \to \infty$. $B \to 0$ für $m \to \infty, (d > 1)$. Damit konvergiert der Gesamtausdruck

$$\frac{N_m}{(D_m)^i} \to \infty \quad \text{für} \quad m \to \infty$$

und wir sind fertig.

Theorem 3: Wenn $\mathbb{K}$ ein C_i - Körper ist, dann ist auch jede algebraische Erweiterung ein C_i - Körper.

Beweis: Es genügt das Theorem für eine endliche Erweiterung $\mathbb{E}$ von $\mathbb{K}$ zu beweisen, weil die Koeffizienten von einer beliebigen Form in einer endlichen Erweiterung liegen.
$f(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine Form in $\mathbb{E}$ mit $n > d^i$. $w_1, \ldots, w_l$ sei eine Basis von $\mathbb{E}$ als Vektorraum über $\mathbb{K}$.
Wir führen neue Variablen Y_{vu} mit

$$X_v = Y_{v1}w_1 + Y_{v2}w_2 + \cdots + Y_{vl}w_l \qquad v = 1, \ldots, n$$

ein. Damit ist

$$f(X) = f_1(Y)w_1 + \cdots + f_l(Y)w_l$$

wobei $f_1, \ldots, f_l$ Formen vom Grad d in *en* Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ sind. Eine Null von f in $\mathbb{E}$ zu finden ist äquivalent zum Finden einer gemeinsamen Null von $f_1, \ldots, f_l$ in $\mathbb{K}$. Und dies haben wir bereits in Theorem 2 (Lang - Nagata) behandelt (weil $en > ed^i$).

Theorem 4: Wenn $\mathbb{K}$ ein C_i - Körper ist und $\mathbb{E}$ eine Erweiterung von $\mathbb{K}$ mit transzendentem Grad j, dann ist $\mathbb{E}$ ein C_{i+j} - Körper.

Beweis: $\mathbb{E}$ ist eine Erweiterung von einer rein transzendenten Erweiterung von $\mathbb{K}$. Mit dem vorherigen Theorem 3 und Induktion über j können wir den Fall reduzieren auf $\mathbb{E} = \mathbb{K}(T)$. Wegen der Homogenität reicht es allerdings Formen im Polynomring $\mathbb{K}[T]$ zu betrachten. Wir führen wieder neue Variablen ein:

$$X_v = Y_{v0} + Y_{v1}T + Y_{v2}T^2 + \cdots + Y_{vs}T^s \quad v = 1, \ldots, n)$$

s betrachten wir später, r sei der maximale Grad der Koeffizienten von f. Damit ergibt sich:

$$f(X) = f_o(Y) + f_1(Y)T + \cdots + f_{ds+r}(Y)T^{ds+r}$$

wobei jedes f_l eine Form vom Grad d mit $n(s+1)$ Variablen ist. Nach dem Theorem von Lang - Nagata müssen wir zeigen, dass

$$n(s+1) > d^i(ds + r + 1)$$

oder

$$(n - d^{i+1})s > d^i(r+1) - n$$

Dies erreichen wir, indem wir s groß wählen. Die gemeinsame nicht - triviale Null von den f_l in $\mathbb{K}$ ergibt eine nicht - triviale Null von f in $\mathbb{K}[T]$. Und wir sind fertig.

Literatur:

(1) Greenberg: Lectures on Forms in Many Variables
(2) Lang, S.: Introduction to Algebraic Geometry, 1958
(3) Lütkebohmert, W.: Skript zur Vorlesung Algebra
(4) Maier, H.: Skript zur Vorlesung Algebra 1 und 2