SATZ VON AX-KOCHEN

$\mathbb{Q}_p$ IST MIT GROßER WAHRSCHEINLICHKEIT EIN C_2-KÖRPER

SELMA SEDLMEIER (Ausarbeitung)

MARTIN RATHGEB (05.07.05)

DOMINIK UFER (12.07.05)

Wiederholung: $\forall\ p \in \mathbb{P}$:

$d = 2,3$: $\mathbb{Q}_p$ ist $C_2(d)$-Körper

Demnach hat jede quadratische Form in 5 und mehr Variablen und jede kubische Form in 10 und mehr Variablen eine nichttriviale Nullstelle über dem p-adischen Körper $\mathbb{Q}_p$.

$d \geq 1$: $\mathbb{F}_p((X))$ ist $C_2(d)$-Körper

Das ist die etwas umständliche Formulierung für: $\mathbb{F}_p((X))$ ist C_2-Körper. Die sog. Artin'sche Vermutung war nun gerade, dass dies auch für die $\mathbb{Q}_p$ gilt. Die Theorie bewerteter Körper hat gezeigt, dass er mit dieser Vermutung nicht zur Gänze richtig lag. Was das nun genauer heißt? Gerade darum wird es im Folgenden gehen…

Definition: (sog. **Ausnahmemenge**)

$$A_d := \{\ p \in \mathbb{P}\ \mid \mathbb{Q}_p \text{ ist kein } C_2(d) \text{ - Körper } \}$$

Mit dieser Konvention kann der erste Punkt der Wiederholung nun auch folgendermaßen formuliert werden $A_2 = \emptyset = A_3$.

Theoreme:

AX – KOCHEN (1965): $\forall\ d \geq 1$: $|A_d| \in \mathbb{N}$

TERJANIAN (nach 1965): $\forall\ d \geq 4$: $|A_d| > 0$

Zum einen wird damit ausgeschlossen, dass die Ausnahmemengen sehr groß werden (sie bleiben stets endlich), zum anderen werden sie für $d > 3$ auch nicht mehr verschwindend klein. Zusammengenommen schätzen die beiden Theoreme also die Größe von A_d nach oben und unten ab.

Der Satz von Ax-Kochen kann natürlich auch in Erinnerung an die Sätze von *Brauer* und *Birch* formuliert werden über die Existenz einer Schranke, ab welcher es zur Ausprägung einer bestimmten Eigenschaft kommt:

$$\exists\ \tilde{p} = \tilde{p}(d) \quad \forall\ p \in \mathbb{P} \quad (\ \tilde{p} \leq p \quad \rightarrow \quad \mathbb{Q}_p \text{ ist ein } C_2(d) \text{ - Körper })$$

Wie der Titel dieser Arbeit bereits verrät, wird nur für das Theorem von Ax-Kochen ein Beweis erbracht.

Generalvorraussetzungen : $(i = 1,2)$

GV1 (K_i, v_i, Γ_i) henselscher Körper

GV2 Γ_i =: Γ gemeinsame Wertegruppe (d.h. Γ ist angeordnete abelsche Gruppe)

GV3 $\overline{K_i}$ =: k gemeinsamer Restklassenkörper

GV4 K_i ist saturiert

Es dürfte bereits klar geworden sein, dass die GV von einem verallgemeinerten Begriff der **diskreten Bewertungen** ausgehen. Die an eine diskrete Bewertung gestellten Forderungen verlangen für ihre Formulierung lediglich die Existenz einer kommutativen Verknüpfung und einer mit ihr verträglichen Ordnung, dh als Bildbereich kommt eigentlich nicht nur $\mathbb{Z}$, sondern jede angeordnete abelsche Gruppe in Frage. Wir wollen das nochmals explizit formulieren.

Definition :

Eine Abbildung v wird **allgemeine Bewertung** genannt, falls $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ (K Körper; Γ angeordnete abelsche Gruppe) **surjektiv** ist und zudem folgende Eigenschaften besitzt:

B1 $v(a) = \infty \rightarrow a = 0$ (surjektiv)

B2 $v(ab) = v(a) + v(b)$ (abelsch)

B3 $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ (angeordnet)

Bemerkung:

Aus B1 bis B3 ergeben sich drei weitere einfache Eigenschaften von allgemeinen Bewertungen:

B4 $v(1) = v(-1) = 0$

B5 $v(-a) = v(a)$ und $v(a^{-1}) = -v(a)$

B6 $v(a) < v(b) \Rightarrow v(a+b) = v(a)$

Es ist leicht zu sehen, dass der Folgepfeil in B1 aufgrund der Surjektivität nur in die genannte Richtung zeigen muss, dass B2 an den Bildbereich die Forderung der Existenz einer kommutativen Verknüpfung stellt, und dass aus B3 die Notwendigkeit einer Anordnung der

Elemente im Bildbereich hervorgeht. Aus der gemeinsamen Gültigkeit von B2 und B3 auf der ganzen Definitionsmenge ist ersichtlich, dass Kommutativität und Ordnung miteinander verträglich sein müssen. Wir wollen gleich noch die gebräuchlichen **Begriffskonventionen** anschließen:

Bewertungsring[1] $O := O_v = \{ a \in K \mid v(a) \geq 0 \}$

Einziges maximales Ideal von O $\quad M := M_v = \{ a \in K \mid v(a) > 0 \}$

Einheiten von O $\quad O^x := O_v^x = \{ a \in K \mid v(a) = 0 \}$

Restklassenkörper $\overline{K} := O/M = O_v/M_v$

Wertegruppe – das ist natürlich Γ selbst

Triviale Bewertung $v \equiv 0$

Aus GV3 folgt übrigens bereits, dass auch für die Körper K_i gilt: $char(K_i) = 0$.

Denn angenommen $char(K_i) \neq 0$, so wäre 1 +…..+ 1 = 0 und demnach auch $\bar{1}$ +…..+ $\bar{1} = \bar{0}$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Lemma:

Voraussetzung:

$(\mathbb{Q}, v, \Gamma)$ bewerteter Körper

$char(\overline{\mathbb{Q}}) = 0$

Behauptung:

$v \equiv 0$ (triviale Bewertung), das heißt $\Gamma = \{0\}$

Beweis:

Weil die 1 mit 0 bewertet wird, und der Bewertungsring O von $\mathbb{Q}$ iB ein Ring und deswegen additiv abgeschlossen ist, ergeben sich die Inklusionen $\mathbb{Z} \subset O \subset \mathbb{Q}$. Weil $\mathbb{Q} = \mathrm{Quot}(\mathbb{Z})$ und für Bewertungen stets gilt, dass $v(0) = \infty$ und $v(z) = v(-z)$, genügt es bereits $v\big|_{\mathbb{Z}_{>0}}$ zu untersuchen. Wir unterscheiden nach dem Bild von $\mathbb{Z}_{>0}$ unter der Bewertung.

Falls $v(\mathbb{Z}_{>0}) = \{0\}$, so ist dann $v(\mathbb{Z}) = \{0, \infty\}$ und ebenso $v(\mathbb{Q}) = \{0, \infty\}$, dh v ist die triviale Bewertung. Weil $O_{v\equiv 0} = \mathbb{Q}$, $M_{v\equiv 0} = \{0\}$, gilt $\overline{\mathbb{Q}} = O_{v\equiv 0}/M_{v\equiv 0} = \mathbb{Q}/\{0\} = \mathbb{Q}$ und damit ist $char(\overline{\mathbb{Q}}) = char(\mathbb{Q}) = 0$. Die triviale Bewertung verträgt sich also wirklich mit der Voraussetzung, doch bleibt noch zu zeigen, dass sie darin die einzige Bewertung ist.

Sonst, dh falls $v(\mathbb{Z}_{>0}) \neq \{0\}$, gibt es also ein $p > 0$, so dass $0 < v(p) = \gamma \in \Gamma$. O.B.d.A. sei p mit dieser Eigenschaft minimal. Dies p ist dann aber prim, denn angenommen $p = ab$

[1] UR von K_i, so dass für alle $x \neq 0$: zumindest x oder x^{-1} aus dem Ring.

mit $a,b \in \mathbb{Z}$: $1 < a,b < p$, dann wäre $v(p) = v(ab) = v(a) + v(b) = 0$, was im Widerspruch zu $0 < v(p)$ stünde. Auf Grund des Euklidischen Algorithmus in $\mathbb{Z}$ ist jedes $n \in \mathbb{Z}_{>p}$ darstellbar in der Form $n = ap^m + b$, wobei $m \geq 1$, $a,b \in \{0,\_,p\text{-}1\}$ und $a \neq 0$. Das ergibt(nach B3) $v(n) \geq \min\{v(ap^m), v(b)\} = \min\{mv(p), v(b)\}$. Die Gleichheit ergibt sich mit B2, weil $0 < a < p$ impliziert, dass $v(a) = 0$. Zudem gilt sogar das „≥“ mit „=“, weil die Bewertung der Summanden für alle $n \in \mathbb{Z}_{>p}$ voneinander verschieden ausfällt, was etwa so zu sehen ist. Wir unterscheiden zwei Fälle. Für $n \in p\mathbb{Z}_{>0}$, das heißt im Besonderen $p \mid n$, ergibt sich $b = 0$. Weil damit $v(b) = \infty$, ist also $v(n) = mv(p) = m\gamma = \gamma\, v_p(n)$. Andernfalls, dh für $n \notin p\mathbb{Z}_{>0}$ bzw. $0 < b < p$, ist $v(b) = 0$ und demnach $v(n) = 0 = \gamma\, v_p(n)$. Diese Fallunterscheidung zeigt bereits, dass $v = \gamma v_p$ auf $\mathbb{Z}_{>p}$. Wie zu Anfang des Beweises bereits geklärt wurde, ist demnach $v = \gamma v_p$ auf ganz $\mathbb{Q}$, was des weiteren heißt, dass unter dieser Bewertung v $char(\overline{\mathbb{Q}}) = p$, was der Voraussetzung widerspricht. Die triviale Bewertung ist demnach wirklich die einzige Bewertung, die sich mit der Voraussetzung (und der Behauptung zugleich) verträgt.

<u>*Definition*</u>:

(K_1, O_1) heißt henselsch, falls O_1 auf jedem algebraischen Oberkörper K_2 von K_1 genau eine Fortsetzung besitzt.

<u>*SatzH1*</u>: (Henselsches Lemma)

<u>Vorraussetzung:</u>

(K, v, Γ) bewerteter Körper

<u>Behauptung:</u>

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) (K, v, Γ) ist henselsch

(ii) $f \in O_v[x]$, $\overline{a} \in \overline{K}$ einfache Nullstelle von $\overline{f}$ in $\overline{K}$ => $\exists\ a_1 \in O_v$: $f(a_1) = 0$ und $\overline{a_1} = \overline{a}$

(iii) $f \in O_v[x]$: $f(X) = \sum_{\nu=0}^{n+1} c_\nu X^\nu$ mit: $c_{n+1} = c_n = 1$, $c_\nu \in M_v$ $(0 \leq \nu < n)$ hat eine Nullstelle in K

<u>*Theorem*</u>:

<u>Vorraussetzung:</u>

K_1 und K_2 erfüllen die Generalvoraussetzungen GV1 bis GV4.

a) F sei abzählbarer Unterkörper von K_1, so dass:

i) $(F, v_1|_F)$ henselscher Körper

ii) $\Gamma / v_1(F)$ torsionsfrei („$v_1(F)$ rein in Γ")

b) $\sigma: F \to K_2$ Einbettung mit den Eigenschaften:

i) $v_2 \circ \sigma = v_1|_F$

ii) $\overline{\sigma(x)} = \bar{x}$ $\quad$ ($\forall\ x \in O_1 \cap F$)

$a_1, \_, a_m \in K_1$ bel. ($m \in N$ bel.)

<u>Behauptung:</u>

$\exists$ eine Erweiterung σ_1 von σ auf einem Oberkörper $F_1 \supset F(a_1, \_, a_m)$, so dass für F_1 und σ_1 wieder a) und b) gilt.

Wir werden das Theorem später beweisen.

BEWEIS VON AX – KOCHEN: (über Widerspruch)

Annahme:

Für ein $d \geq 1$ (beliebig, aber fest; **m:= d²+1**) sei $|A_d| = \infty$ angenommen.

Bemerkung:

Der Leser mag es vorerst einfach einmal hinnehmen, dass allein aus obiger Annahme bereits Objekte (K^*, v^*, Γ^*), (L^*, w^*, Γ^*) konstruiert werden können, welche GV1-4 und zudem die folgenden Eigenschaften erfüllen: **E1** K^* nicht C_2(d) **E2** L^* ist C_2(d). Der explizite Nachweis, dh die Durchführung der Konstruktion der ge-*-ten Objekte, erfolgt im Anschluss an die Widerlegung der Annahme.

Für Letzteres betrachten wir $h \in K^*[X_1, \_, X_m]$ eine beliebige Form vom Grad d mit den Koeffizienten $c_1, \_, c_N$ aus K^* (Reihenfolge beliebig, aber fest).

- Wegen GV3 (bzw. der zugehörigen Bemerkung) ist $\mathbb{Q}$ in K^* und auch in L^* einbettbar und wird nach dem Lemma durch die Restriktionen von v* und w* jeweils trivial bewertet. Wie im ersten Teil des Beweises vom Lemma ist damit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ und demzufolge auch $\overline{f} = f$. Somit ist $(\mathbb{Q}, v \equiv 0, \{0\})$ henselsch nach dem zweiten Punkt des LH, weil es nichts zu tun gibt, um die Nullstellen zu liften. Die $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ liefert eine Einbettung σ des abzählbaren Unterkörpers $\mathbb{Q}$ von K* nach L* derart, dass die Voraussetzungen a) und b) des Theorems trivialerweise erfüllt sind.
- Das Theorem angewandt auf $\mathbb{Q}$, σ und die $c_1, \_, c_N \in K^*$ liefert ein $F_1 \supset$ Q(c_1,_,c_N) und eine Einbettung $\sigma_1 : F_1 \to L^*$ mit den gleichen Eigenschaften a) und b). Über selbige verfügen dann natürlich auch $F_2 := \sigma_1(F_1)$ und σ_1^{-1}. Weil L^* ein $C_2(d)$-Körper ist, hat $\sigma_1(h) \in L^*[Y_1, \_, Y_m]$ eine nichttriviale Nullstelle $(y_1, \_, y_m) \subset L^*$.
- Das Theorem, angewandt auf F_2, σ_1^{-1} und die $y_1, \_, y_m \in L^*$, liefert ein $F_3 \supset F_2\,(y_1, \_, y_m)$ und eine Einbettung $\sigma_2 = (\sigma_1^{-1})_1 : F_3 \to K^*$ mit den Eigenschaften a) und b). Weil σ_2 als Einbettung natürlich homomorph ist, findet sich als angekündigte nichttriviale Nullstelle von h beispielsweise das Tupel $(\sigma_2(y_1), \_, \sigma_2(y_m)) \subset K^*$. Man beachte hierzu $0_{K^*} = \sigma_2 0_{L^*} = \sigma_2([\sigma_1 h](y_1, \_, y_m)) = h(\sigma_2(y_1), \_, \sigma_2(y_m))$.
- Dass nun h als beliebig gewählte Form in K^* vom Grad d eine nichttriviale Nullstelle besitzen soll, steht im Widerspruch dazu, dass K^* kein $C_2(d)$ - Körper ist. Demnach ist die Annahme $|A_d| = \infty$ fallen zu lassen und der Satz von Ax – Kochen „eigentlich" bewiesen. (*Eigentlich*, weil die behaupteten Eigenschaften n.z.z. sind.)

Satz FU (FUNDAMENTALE UNGLEICHUNG):

Vorraussetzung: $\underline{e} := \{1,.....,e\}$

$\underline{f} := \{1,.....,f\}$

1.) (K_l, v_l, Γ_l) bew. Kp. $l \in \{1,2\}$

2.) $(K_1, O_1) \subseteq (K_2, O_2)$

3.) **Restklassengrad** $f := f(O_2 / O_1) = [\overline{K_2} : \overline{K_1}]$, d.h.

$\exists\ \underline{\omega} := (\omega_1,.....,\omega_f) \subset O_2 : \underline{\overline{\omega}}$ linear unabhängig über $\overline{K_1}$

4.) **Verzweigungsindex** $e := e(O_2 / O_1) = [\Gamma_2 : \Gamma_1]$, d.h.

$\exists\ \underline{\pi} := (\pi_1,.....,\pi_e) \subset K_2^* : v_2(\underline{\pi})$ "=" Γ_2 / Γ_1

5.) $a_{ij} \in K_1$ $(i \in \underline{e}, j \in \underline{f})$: $z := \sum_{j=1}^{f} \sum_{i=1}^{e} a_{ij} \pi_i \omega_j$

Behauptung:

1.) $v_2(z) = \min \{ v_2(a_{ij} \pi_i \omega_j) \mid i \in \underline{e},\ j \in \underline{f} \}$

2.) $\{ \pi_i \omega_j \mid i \in \underline{e},\ j \in \underline{f} \}$ ist linear unabhängig über K_1

3.) **Fundamentale Ungleichung**: $n := [K_2 : K_1] < \infty$ → $\boldsymbol{ef \le n}$ (iB: $e, f < \infty$)

Beweis:

Beh.1:

Für $a_{ij} \equiv 0$ für alle i, j sind alle Summanden von z und damit z selbst = 0. → Beh.1 klar!

Nun a_{ij} nicht alle gleich 0. Seien I, J so gewählt, dass **(F1)** $v_2(a_{IJ} \pi_I) = \min_{i,j} \{ v_2(a_{ij} \pi_i) \} = \min_{i,j} \{ v_2(a_{ij} \pi_i \omega_j) \}$. Diese letzte Gleichheit ergibt sich aus Vor.3, wonach alle „$\overline{\omega}$" ungleich $\overline{0}$ sind, das heißt jedes „ω"mit 0 bewertet wird. Des Weiteren ergibt sich **(F2)** $\forall\ i \ne I$: $v_2(a_{IJ} \pi_I) < v_2(a_{ij} \pi_i)$, denn sonst müsste für ein i_0 Gleichheit herrschen und diese ließe sich dann auch nach Ausdrücken in „π" und in „a" geordnet darstellen $v_2(\pi_I) - v_2(\pi_{i_0}) = v_2(a_{i_0 j}) - v_2(a_{IJ})$. Mit der rechten Seiten müsste dann auch die linke ein Element von Γ_1 sein, was aber im Widerspruch zu Vorraussetzung 4 stünde. Direkte Konsequenz von F2 ist, dass **(F3)** $\forall\ i \ne I$: $a_{ij} \pi_i (a_{IJ} \pi_I)^{-1} \in M_2$.

Wir nehmen nun an, Behauptung 1.) sei falsch, und konstruieren daraus einen Widerspruch. Nach Annahme, B3 von allg. Bewertungen und F1 ist also $v_2(z) > v_2(a_{IJ} \pi_I)$ und demzufolge **(F4)** $z(a_{IJ} \pi_I)^{-1} \in M_2$. Die Multiplikation der Definitionsgleichung von z (vgl. Vor.5) mit $(a_{IJ} \pi_I)^{-1}$ und geeignetem Auflösen (Subtraktion der Terme für $i \ne I$) liefert dann

$\sum_{j=1}^{f} a_{I,j} a_{IJ}^{-1} \pi_I^{-1} \pi_I \omega_j \ = \ z(a_{IJ}\pi_I)^{-1} \ - \ \sum_{j=1}^{f} \sum_{i=1, i\neq I}^{e} a_{ij} \pi_i (a_{IJ}\pi_I)^{-1} \omega_j$. Weil nach F3 und F4 alle Summanden der rechten Seite positiv bewerten werden, gilt dies nach B3 auch für die linke Seite und so ergibt sich (nach dem Kürzen) also $\sum_{j=1}^{f} a_{I,j} a_{IJ}^{-1} \omega_j \ \in \ M_2$. Das heißt aber, dass $\sum_{j=1}^{f} \overline{a_{I,j} a_{IJ}^{-1}}\, \overline{\omega_j} \ = 0$ gilt, was im Widerspruch zur Vor.3 steht.

Beh.2:

Mit $z \ = 0$, dh $v_2(z) \ = \ \infty$, gilt nach Beh.1: $\forall \ \ i,j: \ v_2(a_{ij}) \ + \ v_2(\pi_j) \ + \ v_2(\omega_i) \ = \ \infty$. Weil nach Vor.4 $v_2(\pi_i) \ < \ \infty$ und nach Vor.3 $v_2(\omega_j) \ = 0$ gilt, muss also $a_{ij} \ = 0$ sein ($\forall \ i,j$). M.a.W.: $\{ \ \pi_j \omega_i \ \mid \ i,j \ \}$ linear unabhängig über K_1.

Beh.3:

Wegen der Definition für den Grad n einer Körpererweiterung K_2 von K_1 als $\dim_{K_1}(K_2)$, ergibt sich $n \ \geq \ ef$ unmittelbar aus der linearen Unabhängigkeit der „ef"-vielen Vektoren $\pi_j \omega_i$, die ja nach Beh.2 vorliegt.

Definition:

Sei (K,O) ein bewerteter Körper. Dann heißt (K_1,O_1) henselsche Erweiterung von (K,O), falls (K_1,O_1) henselsch ist und $K \subset K_1$, $O_1 \ \cap \ K \ = O$.
(Schreibweise: $(K,O) \subset (K_1,O_1)$)

Satz H2:

Vorraussetzung:

(K,O) bewerteter Körper mit $char(K) = 0$

Behauptung:

1.) $\exists$ henselsche Erweiterung (K_h,O_h), die sogenannte henselsche Hülle, die sich in jede henselsche Erweiterung (K_1,O_1) von (K,O) eindeutig über (K,O) einbetten lässt.

2.) Die henselsche Hülle (K_h,O_h) von (K,O) ist eine maximale, unmittelbare, algebraische Erweiterung, wobei „unmittelbar" bedeutet, dass der Restklassengrad und Verzweigungsindex der Erweiterung gleich 1 ist.

3.) (K,O) henselsch $\Leftrightarrow$ (K,O) besitzt keine echte, algebraische, unmittelbare Erweiterung.

$\underline{KorollarFU1:}$

Vorraussetzung:

(K_i, v_i, Γ_i) bewerteter Körper, K_2 ist algebraisch über K_1, $O_1 \subset O_2$

Behauptung:

1.) Γ_2 / Γ_1 ist Torsionsgruppe, d.h. $\forall \ \gamma \in \Gamma_2 \ \exists$ eine natürliche Zahl n, so dass $n\gamma \in \Gamma_1$

2.) $\overline{K_2}$ ist algebraische Erweiterung von $\overline{K_1}$

Beweis:

1.)Sei $\gamma \in \Gamma_2$ beliebig, aber fest. Wähle $x \in v_1^{-1}(\{\gamma\})$ beliebig. Sei $L = K_1(x)$, O = $O_2 \cap L$ und $v = v_2|_L$, $\Gamma := v(L^x) \subset \Gamma_2$ => (SatzFU) $[\Gamma : \Gamma_1] < \infty$, d.h., Γ / Γ_1 ist endliche Gruppe => $\exists$ eine natürliche Zahl n, so dass $n\gamma \in \Gamma_1$. Da $\gamma \in \Gamma_2$ beliebig war, gilt die Behauptung.

2.)Sei x aus O_2^x fest. Desweiteren sei $L = K_1(x)$ => (wegen SatzFU) $[\overline{L} : \overline{K_1}] < \infty$, daß $\overline{x} \in \overline{L} \subset \overline{K_2}$ ist algebraisch über $\overline{K_1}$

$\underline{LemmaV1:}$

Vorraussetzung:

Sei (K, v, Γ) bewerteter Körper

Behauptung:

Es existiert genau eine Erweiterung w von v auf $F(X)$ (die sogenannte Gauß – Erweiterung), so, dass $w(X) = 0$ und $\overline{X}$ transzendent über $\overline{K}$. Für dieses w gilt $\overline{K(X)} = \overline{K}(\overline{X})$ und $w(K(X)^x) = \Gamma$.

Beweis: (Wir unterschlagen den Nachweis der Existenz, da dieser im Folgenden unnötig ist)

Sei $f = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \in K[X]\backslash\{0\}$ und k derart, dass $v(a_k) = \min v(a_i)$.

Dann gilt $f = a_k \sum_{i=1}^{n} b_i X^i$ mit $b_i = a_i / a_k \in O_v$ und $v(b_i) \geq 0$, g = $\sum_{i=1}^{n} b_i X^i$

=> $w(g) \geq 0$ und $\overline{g} = \sum_{i=0}^{n} \overline{b_i}\,\overline{X^i} \neq \overline{0}$, da $b_k = 1$ und $\overline{X}$ transzendent über $\overline{K}$ => $w(g) = 0$

=> $w(f) = v(a_k)$. Damit ergibt sich auch sofort $w(K(X)^x) = \Gamma$.

- $\overline{K(X)} = \overline{K}(\overline{X})$:

$\overline{K(X)} \supset \overline{K}(\overline{X})$ ist klar.

Sei also $h = f_1 / f_2 \in O_w^x$ mit $f_1, f_2 \in K[X]\backslash\{0\}$

Wie oben schreibt man die Koeffizienten mit minimaler Bewertung vor die Summe: $f_i = c_i g_i$ mit $c_i \in K^x$, $g_i \in O_w^x$ => $h = c(g_1 / g_2)$ mit $c = c_1 / c_2 \in O_w^x$ (da $h, g_1, g_2 \in O_w^x$) => $\overline{h} = \overline{c}(\overline{g_1} / \overline{g_2}) \in \overline{F}(\overline{x})$.

<u>*Lemma V2*</u>:

<u>Vorraussetzung:</u>

Sei $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf dem Körper K, $\Gamma' \supset \Gamma$ geordnete Gruppe und γ ein Element aus Γ' mit: $n\gamma \in \Gamma'$ => $n = 0$ (n ist hierbei eine ganze Zahl)

<u>Behauptung:</u>

Es existiert genau eine Erweiterung w von v auf $K(X)$ mit $w(x) = \gamma$, und für diese gilt: $\overline{K(x)} = \overline{K}$, $w(K(x)^x) = \Gamma \oplus \mathbb{Z}\gamma$ mit der von γ induzierten Ordnung.

<u>*Definition*</u>:

Sei (K, v, Γ) ein bewerteter Körper und $f(X) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu X^\nu \in K[X]$

f wird **primitiv** genannt, genau dann, wenn min { $v(c_\nu)$ | $0 \leq \nu \leq n$ } = 0.

<u>*Lemma V3*</u>:

<u>Vorraussetzung:</u>

(K, v, Γ) sei ein bewerteter Körper, $f \in O[X]$ mit: $\overline{f} \in \overline{K}[X]$ irreduzibel

<u>Behauptung:</u>

f irreduzibel in $K[X]$ und in $O[X]$

<u>Beweis:</u>

(über Widerspruch)

Sei $f \in (O \cap K)[X]$

Annahme:

f ist reduzibel in $K[X]$

Das heißt, $\exists\ h_1, h_2 \in K[X]$ deren Grad größer oder gleich 1 ist, und für die gilt: $f = h_1 h_2$.

Von h_i gehen wir nun zu $\widetilde{h}_i \in (O \cap K)[X]$ primitiv über, indem ein Koeffizient mit minimaler Bewertung abgespalten wird, d.h. $\widetilde{h}_i(X) = \sum_{j=1}^{l} b_j X^j$, $b_j = a_j / a_{k(i)}$ wobei $v(a_{k(i)}) = \min_{1 \leq j \leq l} v(a_j)$, $h_i = \sum_{j=1}^{l} a_j X^j$ => $v(b_j) \geq 0$, $h_i = a_{k(i)} \widetilde{h}_i$

Nach LemmaV1 existiert genau eine Erweiterung w von v (die Gauß – Erweiterung)
Für diese gilt: $0 = w(f) = w(a_{k(1)}\widetilde{h}_1 a_{k(2)}\widetilde{h}_2) = w(a_{k(1)}a_{k(2)}) + w(\widetilde{h}_1) = v(a_{k(1)}a_{k(2)}) + 0 + 0$ => $a_{k(1)}a_{k(2)} \in O \cap K$. => $f_1(X) = a_{k(1)}a_{k(2)}\,\widetilde{h}_1(X)$, $f_2(X) = \widetilde{h}_2(X) \in (O \cap K)[X]$ und $f = f_1 f_2$, wobei f_1 und f_2 beide einen Grad größer oder gleich 1 haben. Dann ist f reduzibel in $(O \cap K)[X]$ und demzufolge auch in $\overline{K}[X]$ bzw. über $\overline{K}$; $\overline{f} = \overline{f_1}\,\overline{f_2}$. Dies ist ein Widerspruch zur Vorraussetzung, dass $\overline{f}$ irreduzibel über $\overline{K}$ ist.

Definition:

Sei S eine nichtleere, unendliche Menge und F eine Teilmenge der Potenzmenge von S.
F heißt **Filter** auf S, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

F1 $\emptyset \notin F$, $S \in F$

F2 $U,V \in F \Rightarrow U \cap V \in F$

F3 $U \in F$, $U \subseteq V \subseteq S \Rightarrow V \in F$

F heißt **Ultrafilter**, falls zusätzlich noch gilt:

F4 $U \subseteq S$, $U \notin F \Rightarrow S \setminus U \in F$

Enthält ein Ultrafilter F eine endliche Menge, so heißt er **Hauptultrafilter**.
Wir nennen einen Ultrafilter F **Nicht – Haupt – Ultrafilter,** wenn F kein Hauptultrafilter ist.

Einen Filter F nennt man **maximal**, falls gilt: $\tilde{F}$ Filter und $F \subset \tilde{F} \Rightarrow \tilde{F} = F$.

Lemma (Übungsaufgabe)

Vorraussetzung:

F Ultrafilter, $U, U_i \subset P$ ($1 \le i \le n$)

Behauptung:

1.) $U \notin F \Leftrightarrow P/U \in F$

2.) $U_1 \cup \ldots\ldots \cup U_n \in F \Rightarrow \exists\ 1 \le i \le n : U_i \in F$

Beweis:

1.) „=>“ : klar, nach Definition von Ultrafilter

„<=“ : Sei $P/U \in F$

Annahme: $U \in F$

=>(wegen F2) $\emptyset = U \cap P/U \in F$, was ein Widerspruch zu F1 ist.

2.)Annahme: $\forall\ 1 \leq i \leq n: U_i \notin F$

=> (wegen F4) $P/U_i := U_i^c \in F$

=> $U_1^c \cap \ldots\ldots \cap U_n^c \in F$

=> $\emptyset = (U_1 \cup \ldots\ldots \cup U_n) \cap (U_1^c \cap \ldots\ldots \cap U_n^c) \in F$

Bemerkung(Filter):

1.) $F_{cf} = \{ U \subseteq S \mid S \setminus U$ ist endlich $\}$ ist ein Filter auf der Menge S, jedoch kein Ultrafilter (und somit kein Hauptultrafilter)

2.) $F_{cf} \subset F$, F maximaler Filter auf S => F ist ein Nicht - Haupt - Ultrafilter

3.) $\forall\ U' \subset S$ unendlich $\exists$ ein Nicht – Haupt - Ultrafilter F auf S mit: $U' \in F$

Beweis:

1.) F_{cf} erfüllt offensichtlich F1 (da S unendlich ist). F3 ist auch klar. F2 folgt mit den De Morgan'schen Regeln.

2.) a) F ist Ultrafilter

Sei für $\emptyset \neq U \in S$ angenommen: $U \notin F$. Dann haben wir zu zeigen, dass $U^c \in F$. Betrachte $\tilde{F} := \{ W \subset S \mid \exists V \in F \cup \{ U^c \cap U' \mid U' \in F_{cf} \}: V \subset W \}$. $\tilde{F}$ ist nach Definition ein Filter (denn F1 und F3 sind offensichtlich erfüllt und auch F2 ist einzusehen), der F enthält ($F \subset \tilde{F}$). Wegen der Maximalität von F gilt Gleichheit, was $U^c \in F$ impliziert.

b) F ist Nicht−Haupt−Ultrafilter

Annahme: $\{s\} \in F$ ($s \in S$)

Dann gilt (wegen $F_{cf} \subset F$) : $\{s\}^c \in F$, was wegen F2 im Widerspruch zu F1 steht.

3.) Sei $U' \notin F_{cf}$. Betrachte $\tilde{F} := \{ W \subset S \mid V \subset W$ für ein $V \in F_{cf} \cup \{U' \cap \tilde{V} \mid \tilde{V} \in F_{cf}\}\}$. Es gilt: $\tilde{F}$ ist Filter (s.o.) und $U' \in \tilde{F}$ denn für $V = U'$ folgt: $V = U' \cap \tilde{V}$ für $\tilde{V} = S \in F_{cf}$ und $V \subset U'$.

Nach dem Lemma von Zorn kann $\tilde{F}$ zu einem maximalen Filter $\tilde{F}$' auf S erweitert Werden. Wegen 1.) ist $\tilde{F}$' ein Nicht – Haupt – Ultrafilter.

Bemerkung:

Sei $(K^{(s)}, v^{(s)}, \Gamma^{(s)})$ ein bewerteter Körper für alle $s \in S$, wobei S eine unendliche abzählbare Menge ist.

Definiert man Addition und Multiplikation auf $\prod_{s \in S} K^{(s)}$ komponentenweise, d.h. $(a^{(s)})_{s\in S} + (b^{(s)})_{s\in S} = (a^{(s)} + b^{(s)})_{s\in S}$ bzw. $(a^{(s)})_{s\in S}\ (b^{(s)})_{s\in S} = (a^{(s)} b^{(s)})_{s\in S}$ für $(a^{(s)})_{s\in S}$,

$(b^{(s)})_{s\in S} \in \prod_{s\in S} K^{(s)}$, so wird $\prod_{s\in S} K^{(s)}$ mit diesen beiden Verknüpfungen zu einem kommutativen Ring mit Eins.

(Nullelement ist die Folge $(a^{(s)})_{s\in S}$ mit $a^{(s)} = 0$ für alle $s \in S$; Einselement ist die Folge $(b^{(s)})_{s\in S}$ mit $b^{(s)} = 1$ für alle $s \in S$)

Wir definieren auf $\prod_{s\in S} K^{(s)}$ durch einen Ultrafilter *F* auf S eine Relation $\sim_F$ wie folgt:

$(a^{(s)})_{s\in S} \sim_F (b^{(s)})_{s\in S} \Leftrightarrow \{ s \mid a^{(s)} = b^{(s)} \} \in F.$

<u>*Bezeichnung*:</u>

Wir bezeichnen im Folgenden die Folge $(a_i^{(s)})_{s\in S} \in \prod_{s\in S} K^{(s)}$ mit a_i^*

Den Quotienten $\prod_{s\in S} K^{(s)} / F$ nennen wir **Ultraprodukt** der Körper $K^{(s)}$ nach dem Ultrafilter *F*.

<u>*Satz*1</u>

<u>Behauptung:</u>

1.) Die oben definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation

2.) $\prod_{s\in S} K^{(s)} / F$ ist ein Körper

<u>Beweis:</u>

1.) • Reflexivität:

$\{ s \mid a_i^{(s)} = a_i^{(s)} \} = S \in F$ (wegen F1) => $a_i^* \sim_F a_i^*$

• Symmetrie:

$a_1^* \sim_F a_2^*$ => $\{ s \mid a_2^{(s)} = a_1^{(s)} \} = \{ s \mid a_1^{(s)} = a_2^{(s)} \} \in F$

• Transitivität:

$a_1^* \sim_F a_2^*,\ a_2^* \sim_F a_3^*$ => $\{ s \mid a_1^{(s)} = a_2^{(s)} \}, \{ s \mid a_2^{(s)} = a_3^{(s)} \} \in F$

=> $\{ s \mid a_1^{(s)} = a_3^{(s)} \} \supset \{ s \mid a_1^{(s)} = a_2^{(s)} \} \cap \{ s \mid a_2^{(s)} = a_3^{(s)} \} \in$ *F* (wegen F2) d.h. $\{ s \mid a_1^{(s)} = a_3^{(s)} \} \in F$ (wegen F3) und damit $a_1^* \sim_F a_3^*$

Die Relation „$\sim_F$" ist also tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

2.) $\prod_{s\in S} K^{(s)} / F$ bezeichnet kanonisch die Menge der Äquivalenzklassen $[a_i^*] = [(a_i^{(s)})_{s\in S}] = \{(c^{(s)})_{s\in S} \mid (c^{(s)})_{s\in S} \sim_F (a_i^{(s)})_{s\in S} \}$ auf welcher als Addition und Multiplikation zu verstehen ist:

- $[a_1^*] + [a_2^*] = [(a_1^{(s)})_{s\in S}] + [(a_2^{(s)})_{s\in S}] = [(a_1^{(s)} + a_2^{(s)})_{s\in S}]$
- $[a_1^*][a_2^*] = [(a_1^{(s)})_{s\in S}][(a_2^{(s)})_{s\in S}] = [(a_1^{(s)} a_2^{(s)})_{s\in S}]$

$\prod_{s\in S} K^{(s)} / F$ ist dann nicht nur ein kommutativer Ring mit Eins, sondern sogar ein Körper, wofür wir nur noch die Nullteilerfreiheit zu zeigen haben.

Bemerkung:

Das Nullelement ist die Äquivalenzklasse der Folge $(a_i^{(s)})_{s\in S} \in \prod_{s\in S} K^{(s)}$ mit $a_i^{(s)} = 0$ $\forall\, s$. Einselement ist die Äquivalenzklasse der Folge $(a_i^{(s)})_{s\in S}$ mit $a_i^{(s)} = 1\ \forall\, s$.

Wir bezeichnen das Nullelement mit $[0^*]$ und das Einselement mit $[1^*]$.

$[\infty^*]$ bezeichnet die Äquivalenzklasse der Folge $(\infty, \infty, \ldots..)$.

Sei $[a_i^*] \in \prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ beliebig mit: $[a_i^*] \neq [0^*]$

Dann gilt: $a_i^* \not\sim_F 0^*$ $(0^* = (0,0, \ldots..) \in \prod_{s\in S} K^{(s)})$

Nach Definition der Äquivalenzrelation bedeutet das: $\{ s \mid a_i^{(s)} = 0 \} \notin F$

Weil F ein Ultrafilter ist, liegt die Menge $\{ s \mid a_i^{(s)} = 0 \}^c = \{ s \mid a_i^{(s)} \neq 0 \}$ in F.

Eine Folge $(b^{(s)})_{s\in S}$ sei komponentenweise definiert durch:

$b^{(s)} = 1/a_i^{(s)}$, falls $a_i^{(s)} \neq 0$, und $b^{(s)} = 0$, falls $a_i^{(s)} = 0$.

Für diese Folge gilt: $(b^{(s)})_{s\in S} \in \prod_{s\in S} K^{(s)}$ (denn $\forall s$: $0, a_i^{(s)} \in K^{(s)}$) und $\{ s \mid a_i^{(s)} b^{(s)} = 1 \} = \{ s \mid a_i^{(s)} \neq 0 \} \in F$, d.h. $(a_i^{(s)} b^{(s)})_{s\in S} \sim_F 1^*$ => $[(a_i^{(s)} b^{(s)})_{s\in S}] = [1^*]$.

Nach Definition der Multiplikation gilt also: $[(a_i^{(s)})_{s\in S}][(b^{(s)})_{s\in S}] = [1^*]$ ($[(b^{(s)})_{s\in S}]$ ist multiplikatives Inverses zu $[(a_i^{(s)})_{s\in S}]$).

$[a_i^*]$ war beliebig gewählt, das heißt, zu jedem $[a_i^*] \neq [0^*]$ aus $\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ existiert ein multiplikatives Inverses . Damit ist $\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ nulltelerfrei und demnach ein Körper.

Satz2

Vorraussetzung:

Sei $\prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F = \{ [(\gamma^{(s)})_{s\in S}] \mid (\gamma^{(s)})_{s\in S} \in \prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F \}$ das Ultraprodukt der $\Gamma^{(s)}$ nach dem Ultrafilter F

Behauptung:

Es existiert eine Ordnung „$\leq^*$“ auf $(\prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F) \cup \{[\infty^*]\}$, so dass $\prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F$ eine angeordnete abelsche Gruppe ist.

Beweis:

$\forall\ s \in S$ gilt: $\Gamma^{(s)} \cup \{\infty\}$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe, d.h. $\exists$ totale Ordnung $\le^{(s)}$ => $\forall\ \gamma_i^{(s)} \in \Gamma^{(s)}$ gilt:

0) $\gamma_i^{(s)} \le \infty$

i) $\gamma_i^{(s)} \le^{(s)} \gamma_i^{(s)}$

ii) $\gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}$, $\gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_1^{(s)}$ => $\gamma_1^{(s)} = \gamma_2^{(s)}$

iii) $\gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}$, $\gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_3^{(s)}$ => $\gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_3^{(s)}$

iv) $\gamma_1^{(s)}$, $\gamma_2^{(s)} \in \Gamma^{(s)}$ => $\gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}$ oder $\gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_1^{(s)}$

Definiert man (wie bei $\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$) eine Addition auf ($\prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F$) $\cup$ $\{[\infty^*]\}$, so wird auch ($\prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F$) $\cup$ $\{[\infty^*]\}$ zu einer abelschen Gruppe.

Durch $[(\gamma_1^{(s)})_{s\in S}] \le^* [(\gamma_2^{(s)})_{s\in S}] \Leftrightarrow \{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}\ \} \in F$ ist dann auf ($\prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F$) $\cup$ $\{[\infty^*]\}$ eine totale Ordnung definiert, denn $\forall\ [\gamma_i^*] = [(\gamma_i^{(s)})_{s\in S}] \in \prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F$ gilt:

- $\{\ s \mid \gamma_i^{(s)} \le^{(s)} \gamma_i^{(s)}\ \} = S \in F$ (wegen F1) => $[\gamma_i^*] \le^* [\gamma_i^*]$
- $[\gamma_1^*] \le^* [\gamma_2^*]$, $[\gamma_2^*] \le^* [\gamma_3^*]$ => $\{ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}\ \} \in F$ und $\{\ s \mid \gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_3^{(s)}\ \} \in F$ => $\{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_3^{(s)}\ \} \supset \{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}\ \} \cap \{\ s \mid \gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_3^{(s)}\ \} \in F$ (wegen F2), d.h. $\{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_3^{(s)}\ \} \in F$ (wegen F3), also $[\gamma_1^*] \le^* [\gamma_3^*]$
- $[\gamma_1^*] \le^* [\gamma_2^*]$, $[\gamma_2^*] \le^* [\gamma_1^*]$ => $\{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}\ \} \in F$ und $\{\ s \mid \gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_3^{(s)}\ \} \in F$ => $\{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}\ \} \cap \{\ s \mid \gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_1^{(s)}\ \} = \{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}$ und $\gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_1^{(s)}\ \} = \{\ s \mid \gamma_1^{(s)} = \gamma_2^{(s)}\ \} \in F$ => $[\gamma_1^*] = [\gamma_2^*]$ (wegen Eigenschaft ii) der Ordnung „$\le^{(s)}$“ auf $\Gamma^{(s)}$)

Für $\gamma_1^{(s)}$, $\gamma_2^{(s)} \in \Gamma^{(s)}$ gilt immer entweder $\gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}$ oder $\gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_1^{(s)}$

Seien $[\gamma_1^*], [\gamma_2^*] \in \prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F$.

Annahme: $[\gamma_1^*] \le^* [\gamma_2^*]$ gilt nicht.

Dann folgt $\{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}\ \} \notin F$ und damit $\{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}\ \}^c \in F$

$\{\ s \mid \gamma_1^{(s)} \le^{(s)} \gamma_2^{(s)}\ \}^c = \{\ s \mid \gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_1^{(s)}\ \}$ weil $\le^{(s)}$ eine totale Ordnung auf $\Gamma^{(s)}$ ist, d.h.

$\{\ s \mid \gamma_2^{(s)} \le^{(s)} \gamma_1^{(s)}\ \} \in F \Leftrightarrow [\gamma_2^*] \le^* [\gamma_1^*]$.

Außerdem gilt: $\{\ s \mid \gamma_i^{(s)} \le^{(s)} \infty\ \} = S \in F$ für $i \in \mathbb{N}$ (wegen 0))

$\Rightarrow [\gamma_i^*] \leq^* [\infty^*] \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$

Damit ist „$\leq^*$" eine totale Ordnung.

*Satz*3

Behauptung:

Es existiert eine Bewertung $v: \prod_{s\in S} K^{(s)}/F \rightarrow (\prod_{s\in S}\Gamma^{(s)}/F\ ) \cup \{[\infty^*]\}$, so dass ($\prod_{s\in S} K^{(s)}/F,\ v, \prod_{s\in S}\Gamma^{(s)}/F$)

Ein bewerteter Körper ist.

Beweis:

Es ist nach Vorraussetzung $v^{(s)}\colon\ K^{(s)} \rightarrow \Gamma^{(s)} \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf $K^{(s)}$ für alle $s \in S$.

Wir definieren nun eine Abbildung $v: \prod_{s\in S} K^{(s)}/F \rightarrow (\prod_{s\in S}\Gamma^{(s)}/F\ ) \cup \{[\infty^*]\}$ wie folgt:

$v([(a^{(s)})_{s\in S}]) = [(v^{(s)}(a^{(s)}))_{s\in S}]$

Dann gilt:

- $v([(a^{(s)})_{s\in S}]) = [\infty^*] \Rightarrow [(v^{(s)}(a^{(s)}))_{s\in S}] = [\infty^*] \Rightarrow \{ s \mid v^{(s)}(a^{(s)}) = \infty \} = \{ s \mid a^{(s)} = 0 \} \in F \Rightarrow (a^{(s)})_{s\in S} \sim_F (0,0, \ldots..) \Rightarrow [(a^{(s)})_{s\in S}] = [\ 0^*]$
- $v([(a^{(s)})_{s\in S}][(b^{(s)})_{s\in S}]) = v([(a^{(s)}b^{(s)})_{s\in S}]) = [(v^{(s)}(a^{(s)}b^{(s)}))_{s\in S}] =$
  $[(v^{(s)}(a^{(s)})+v^{(s)}(b^{(s)}))_{s\in S}] = [(v^{(s)}(a^{(s)}))_{s\in S} + (v^{(s)}(b^{(s)}))_{s\in S}] =$
  $[(v^{(s)}(a^{(s)}))_{s\in S}]+[(v^{(s)}(b^{(s)}))_{s\in S}] = v([(a^{(s)})_{s\in S}]) + v([(b^{(s)})_{s\in S}])$
- Sei $v([(a^{(s)})_{s\in S}]) = \min\{ v([(a^{(s)})_{s\in S}]),\ v([(b^{(s)})_{s\in S}]) \}$
  $\Rightarrow [(v^{(s)}(a^{(s)}))_{s\in S}] \leq [(v^{(s)}(b^{(s)}))_{s\in S}] \Rightarrow \{ s \mid v^{(s)}(a^{(s)}) \leq v^{(s)}(b^{(s)}) \} \in F$
  $\Rightarrow \{ s \mid v^{(s)}(a^{(s)}) = \min\{ v^{(s)}(a^{(s)}),\ v^{(s)}(b^{(s)}) \} \} \in F$
  $\Rightarrow \{ s \mid v^{(s)}(a^{(s)}+b^{(s)}) \geq v^{(s)}(a^{(s)}) \} \in F \Rightarrow [(v^{(s)}(a^{(s)}+b^{(s)}))_{s\in S}]$
  $= v([(a^{(s)} + b^{(s)})_{s\in S}]) = v([(a^{(s)})_{s\in S}] + [(b^{(s)})_{s\in S}]) \geq [(v^{(s)}(a^{(s)}))_{s\in S}] = v([(a^{(s)})_{s\in S}])$

Damit sind.die Eigenschaften B1 bis B3 erfüllt.

Die Surjektivität von v wird folgendermaßen klar:

Sei $\gamma^{(s)} \in \Gamma^{(s)}$ beliebig. Weil $v^{(s)}$ surjektiv ist , existiert dann ein $a^{(s)} \in K^{(s)}$ mit $v^{(s)}(a^{(s)}) = \gamma^{(s)}$. Für die Äquivalenzklassen $[(\gamma^{(s)})_{s\in S}] \in \prod_{s\in S}\Gamma^{(s)}/F$ und $[(a^{(s)})_{s\in S}] \in \prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ gilt: $v([(a^{(s)})_{s\in S}]) = [(v^{(s)}(a^{(s)}))_{s\in S}] = [(\gamma^{(s)})_{s\in S}]$. Damit ist auch v surjektiv.

Damit ist $(\prod_{s\in S} K^{(s)}/F,\ v,\ \prod_{s\in S}\Gamma^{(s)}/F)$ ein bewerteter Körper. Wir bezeichnen diesen als das Ultraprodukt der bewerteten Körper $(K^{(s)}, v^{(s)}, \Gamma^{(s)})$.

*Satz*4

Behauptung:

Für $(\prod_{s\in S} K^{(s)}/F,\ v,\ \prod_{s\in S}\Gamma^{(s)}/F)$ gelten folgende Aussagen:

i) $char(\prod_{s\in S} K^{(s)}/F) = p \Leftrightarrow \{ s \mid char(K^{(s)}) = p \} \in F$; entsprechend für $\overline{\prod_{s\in S} K^{(s)}/F}$

ii) $\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ ist $C_2(d)$ - Körper $\Leftrightarrow \{ s \mid K^{(s)}$ ist $C_2(d)$ - Körper $\} \in F$

iii) $\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ ist kein $C_2(d)$ - Körper $\Leftrightarrow \{ s \mid K^{(s)}$ ist kein $C_2(d)$ - Körper $\} \in F$

iv) $K^{(s)}$ henselsch $\forall\ s \in S \Rightarrow \prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ ist henselsch

Beweis:

i) $[1^*] + \ldots + [1^*] = [0^*] \Leftrightarrow [(\sum_{i=1}^{p} 1, \ldots, \sum_{i=1}^{p} 1)] = [(0, 0, \ldots)]$

$\Leftrightarrow \{ s \mid \sum_{i=1}^{p} 1 = 0$ in $K^{(s)} \} \in F$

ii) „=>“

Sei also $\{ s \mid K^{(s)}$ ist $C_2(d)$ - Körper $\} \in F$,
$m = d^2 + 1$, $h \in (\prod_{s\in S} K^{(s)}/F)[X_1, \ldots, X_m]$ homogen, vom Grad d und $[c_i^*] = [(c_i^{(s)})_{s\in S}]$ $(1 \le i \le N)$ seien die Koeffizienten von h.
Indem wir aus jeder Äquivalenzklasse $[(c_i^{(s)})_{s\in S}]$ einen Repräsentanten $(c_i^{(s)})_{s\in S}$ wählen, erhalten wir für jedes $s \in S$ ein homogenes Polynom $h^{(s)} \in K^{(s)}[X_1, \ldots, X_m]$ mit den Koeffizienten $c_i^{(s)}$
$(1 \le i \le N)$. Die Menge A:= $\{ s \mid h^{(s)}$ hat eine nichttriviale Nullstelle in $K^{(s)} \}$ enthält die Menge $\{ s \mid K^{(s)}$ ist $C_2(d)$ - Körper $\}$. Diese liegt in *F*. Damit liegt wegen F3 auch A in *F*. Wir wählen nun für jedes $s \in$ A eine nichttriviale Nullstelle $(a_1^{(s)}, \ldots, a_m^{(s)}) \in (K^{(s)})^m$ von $h^{(s)}$. Nach Definition der Addition und Multiplikation auf $\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ gilt: $[0^*] = [(h^{(s)}(a_1^{(s)}, \ldots, a_m^{(s)}))_{s\in S}] =$
$h([(a_1^{(s)})_{s\in S}], \ldots, [(a_m^{(s)})_{s\in S}])$. $([(a_1^{(s)})_{s\in S}], \ldots, [(a_m^{(s)})_{s\in S}])$ ist also Nullstelle von h in

$\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$. Weil $\bigcup_{i=1}^{m}\{\ s\ \mid\ a_i^{(s)} \neq 0\ \} \supseteq \mathrm{A}\ \in F$ gilt, folgt: $\bigcup_{i=1}^{m}\{\ s\ \mid\ a_i^{(s)} \neq 0\ \}\ \in F$,

und damit $\bigcup_{i=1}^{m}\{\ s\ \mid\ a_i^{(s)} \neq 0\ \} \neq\ \emptyset$. Nach dem Lemma(Übungsaufgabe) ist mindestens

ein $[(a_i^{(s)})_{s\in S}]$ ist ungleich der Null $[0^*]$, die Nullstelle $([(a_1^{(s)})_{s\in S}],.....,[(a_m^{(s)})_{s\in S}])$ ist also nichttrivial.

„<="

Sei also $\{\ s\ \mid\ K^{(s)}$ ist $C_2(d)$ - Körper $\} \notin F$

$\Rightarrow \{\ s\ \mid\ K^{(s)}$ ist kein $C_2(d)$ - Körper $\}=: \mathrm{B} \in F$ (weil F Ultrafilter ist)

Wir betrachten eine allgemeine homogene Form $h_{m,d}$ vom Grad d in den Variablen $X_1,.....,X_m$ mit Koeffizienten $C_1,.....,C_N$ ($N = \binom{m}{d}$) und wählen dann für jedes $s \in \mathrm{B}$ Koeffizienten $c_1^{(s)},.....,c_N^{(s)}$ aus $K^{(s)}$, so dass das homogene Polynom $h^{(s)} :=$ $h_{m,d}(c_1^{(s)},.....,c_N^{(s)}; X_1,.....,X_m)$ nur die triviale Nullstelle in $K^{(s)}$ hat. Zu den Koeffizienten bilden wir die Äquivalenzklassen $[(c_1^{(s)})_{s\in S}],\ldots, [(c_N^{(s)})_{s\in S}]$.

Sei $h = h_{m,d}([(c_1^{(s)})_{s\in S}],\ldots, [(c_N^{(s)})_{s\in S}]\ ;\ X_1,.....,X_m)$. Dann ist h ein homogenes Polynom über $\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ vom Grad d, für welches wir zeigen werden, dass es in $\prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ keine nichttriviale Nullstelle hat. Weil $\mathrm{B} \subset \bigcup_{i=1}^{N}\{\ s\ \mid\ c_i^{(s)} \neq 0\ \}$ folgt (wegen F3): $\bigcup_{i=1}^{N}\{\ s\ \mid\ c_i^{(s)} \neq 0\ \} \in F \Rightarrow$ mindestens einer der Koeffizienten $[(c_1^{(s)})_{s\in S}],\ldots,$ $[(c_N^{(s)})_{s\in S}]$ ist verschieden von $[0^*]$. Nehmen wir nun an,

$([(a_1^{(s)})_{s\in S}],\ldots, [(a_N^{(s)})_{s\in S}])$ sei eine nichttriviale Nullstelle von h, also $h($ $[(a_1^{(s)})_{s\in S}],\ldots, [(a_N^{(s)})_{s\in S}]) = [0^*]$ und $[(a_i^{(s)})_{s\in S}] \neq [0^*]$ für mindestens ein i.

Dann liegen die Mengen $\{\ s\ \mid\ h^{(s)}(a_1^{(s)},.....,a_m^{(s)}) = 0\ \}$ und $\bigcup_{i=1}^{m}\{\ s\ \mid\ a_i^{(s)} \neq 0\ \}$ in F (weil $\{\ s\ \mid\ a_i^{(s)} \neq 0\ \} \in F$ für ein i) $\Rightarrow$ C:= $\{\ s\ \mid\ h^{(s)}(a_1^{(s)},.....,a_m^{(s)}) = 0\ \} \cap (\bigcup_{i=1}^{m}\{$ $s\ \mid\ a_i^{(s)} \neq 0\ \})$ liegt in $F \Rightarrow \mathrm{C} \cap \mathrm{B} \in F$ (wegen F2) $\Rightarrow \mathrm{C} \cap \mathrm{B} \neq \emptyset$. Das ist ein Widerspruch, denn für $s \in \mathrm{C} \cap \mathrm{B}$ gilt:

Zum einen ist $(a_1^{(s)},.....,a_m^{(s)})$ nichttriviale Nullstelle von $h^{(s)}$ ($s \in \mathrm{C}$), zum anderen hat $h^{(s)}$ nur die triviale Nullstelle ($s \in \mathrm{B}$).

iii) folgt aus ii) durch Kontraposition, Ultrafiltereigenschaft von F und Lemma(Übungsaufgabe)

iv) Sei $(K^{(s)}, v^{(s)}, \Gamma^{(s)})$ henselsch

Für $f(X) = X^{n+1} + X^n + [(c_{n-1}^{(s)})_{s\in S}]X^{n-1} + ... + [(c_0^{(s)})_{s\in S}]$ mit $[(v^{(s)}(c_i^{(s)})_{s\in S})] > [0^*]$

gilt: $\{ s \mid v^{(s)}(c_i^{(s)}) > 0 \} \in F$ für $0 \le i \le n$ und demnach wegen F2 auch

$A := \bigcap_{i=0}^{n-1} \{ s \mid v^{(s)}(c_i^{(s)}) > 0 \} \in F.$

Für jedes $s \in A$ existiert eine Nullstelle $b^{(s)}$ des Polynoms $f^{(s)}(X) =$

$X^{n+1} + X^n + c_{n-1}^{(s)} X^{n-1} + ... + c_0^{(s)}$ mit $c_i^{(s)}$ aus $M_{v^{(s)}}$ (wegen $Satz H1$, iii))

Definiere $a^{(s)}$ folgendermaßen:

$a^{(s)} = b^{(s)}$ falls $s \in A$ und $a^{(s)} = 0$ falls $s \notin A$

Dann folgt: $A \subseteq \{ s \mid f^{(s)}(a^{(s)}) = 0 \} \Rightarrow \{ s \mid f^{(s)}(a^{(s)}) = 0 \} \in F$ (wegen F3)). Daraus folgt, dass $f([(a^{(s)})_{s\in S}]) = [(f^{(s)}(a^{(s)}))_{s\in S}] = [0^*]$

$\Leftrightarrow \prod_{s\in S} K^{(s)}/F$ ist henselsch

$\underline{Theorem(Saturiertheit)}$

Vorraussetzung:

- $(K, v, \Gamma) = (\prod_{s\in S} K^{(s)}/F,\ v, \prod_{s\in S} \Gamma^{(s)}/F)$ wie oben definiert, F ist Nicht – Haupt – Ultrafilter auf S
- R_n Relation in den Unbestimmten (Y_υ) (n, υ natürliche Zahlen) mit Parametern aus K und Γ (i.B. Funktionsausdrücke).
- für jede natürliche Zahl m gilt: $(R_0, ..., R_m)$ haben eine gemeinsame Realisation der (Y_υ) in K

Behauptung:

Es gibt eine simultane Realisation $(y_\upsilon)_{\upsilon\in\mathbb{N}}$ für $(Y_\upsilon)_{\upsilon\in\mathbb{N}}$ in K für $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bezeichnung: K ist saturiert

Beweis:

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $(y_{v,m})_{v\in\mathbb{N}}$ Realisation der $R_0((Y_\upsilon), a), ..., R_m((Y_\upsilon), a)$ in K.

(a steht beispielhaft für die in der Relation R_n auftretenden Parameter, in unseren Fällen sind das null, ein oder zwei Stück.)

Von der Existenz einer solchen Folge für jede natürliche Zahl m kann nach Vorraussetzung ausgegangen werden.

Realisation heißt natürlich widerum: $V_m := \{ s \mid R_\mu^{(s)}((y_{j,m}^{(s)})_{j\in\mathbb{N}}, a^{(s)})\ \forall\ 0 \le \mu \le m \} \in F$

o.B.d.A. gilt: $V_{m+1} \subset V_m$

Wir definieren nun $U_m := V_m \cap \{ s \mid s \geq m \}$ => $U_m \in F$, denn $\{ s \mid s \geq m \}$ ist cofinit und F ist Nicht – Haupt – Ultrafilter . Daraus folgt:

- $U_m \subset V_m$ und $\bigcap_m U_m = \emptyset$
- $U_{m+1} \subset U_m$ und $U_m \backslash U_{m+1} \subset V_m$

=> (vgl. Teleskopsumme) $U_m = \bigcup_{k \geq m} (U_k \backslash U_{k+1})$

Beweis: klar!

Betrachte die „Diagonalform“ : $y_\upsilon^{(s)} := y_{\upsilon,s}^{(s)}$, falls $s \in U_m \backslash U_{m+1}$ und $y_\upsilon^{(s)} := 0$ falls $s \notin U_m \backslash U_{m+1}$

Diese „Diagonalform“ realisiert simultan die $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denn wir zeigen, dass für jede natürliche Zahl m gilt: $W_m := \{ s \mid R_m^{(s)}((y_\upsilon^{(s)})_{\upsilon \in \mathbb{N}}, a^{(s)}) \} \in F.$

Nach Definition von $y_\upsilon^{(s)}$ liegt $U_m \backslash U_{m+1}$ in W_m (weil $V_m \subset W_m$ und $U_m \backslash U_{m+1} \subset V_m$) .

Für $k \geq m$ gilt: $U_k \backslash U_{k+1} \subset V_k \subset V_m$.

Daraus folgt, dass $U_k \backslash U_{k+1} \subset W_m$ für $k \geq m$ und damit auch $U_m = \bigcup_{k \geq m} (U_k \backslash U_{k+1}) \subset W_m$.

Weil $U_m \in F$ gilt, folgt wegen F3 auch $W_m \in F$.

Wir können nun aus der Annahme im Beweis des Satzes von Ax – Kochen (K^*, v^*, Γ^*) und (L^*, w^*, Γ^*) konstruieren:

$\mathbb{P}$ = die Menge der Primzahlen ist eine nichtleere, abzählbare Menge.

Nach der Annahme ist A_d eine unendliche Menge. Nach Bemerkung(Filter) 3.) existiert daher ein Nicht – Haupt – Ultrafilter F auf der Potenzmenge von $\mathbb{P}$, welcher A_d enthält.

Wir setzen also $S = \mathbb{P}$.

Weiter setzen wir $K^{(s)} = K^{(p)} = \mathbb{Q}_p$ bzw. $\mathbb{F}_p((X))$ und $\Gamma^{(s)} = \Gamma^{(p)} = \mathbb{Z}$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

$v^{(s)}$ sei die kanonische Bewertung von $\mathbb{Q}_p$, $w^{(s)}$ die kanonische Bewertung von $\mathbb{F}_p((X))$.

<u>*Bezeichnung*</u> :

Wir bezeichnen mit K^* das Ultraprodukt $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Q}_p / F$ und mit L^* das Ultraprodukt $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{F}_p((X)) / F$. Mit Γ^* bezeichnen wir $\Gamma \cup \{ [\infty^*] \}$, wobei Γ das Ultraprodukt $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z} / F$ bezeichnet.

Definition:

$v^*: K^* \to \Gamma^*$ sei definiert durch: $v^*([(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]) = [(v^{(p)}(a^{(p)}))_{p\in\mathbb{P}}]$ für $[(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Q}_p / F$. Analog definieren wir $w^*: L^* \to \Gamma^*$ durch: $w^*([(b^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]) = [(w^{(p)}(b^{(p)}))_{p\in\mathbb{P}}]$ für $[(b^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p((X))/F$.

Mit $Satz1$, $Satz2$ und $Satz3$ gilt:

- $\Gamma^* \cup \{ [\infty^*] \}$ ist eine angeordnete abelsche Gruppe
- (K^*, v^*, Γ^*) und (L^*, w^*, Γ^*) sind bewertete Körper und haben beide dieselbe Wertegruppe Γ^*

Nach $Satz4$, iv) sind K^* und L^* henselsch, da $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{F}_p((X))$ henselsche Körper sind $\forall\ p \in \mathbb{P}$. Damit sind GV1 und GV2 erfüllt.

Definition:

$O^*_{v^*} = \{ [(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in K^* \mid v^*([(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]) \geq 0 \}$, $M^*_{v^*} = \{ [(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in K^* \mid v^*([(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]) > 0 \}$.

Analog werden auch $O^*_{w^*}$ und $M^*_{w^*}$ definiert.

Es gilt: $\overline{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{F}_p = \overline{\mathbb{F}_p((X))}$.

Bemerkung:

Die Abbildung „$-$“ : $O^*_{v^*} \to \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p / F$, $[(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \to \overline{[(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]} := [(\overline{a^{(p)}})]$ ist wohldefiniert.

(entsprechend für w^*)

Beweis:

$[(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in O^*_{v^*} \Leftrightarrow \{ p \mid v^{(p)}(a^{(p)}) \geq 0 \} \in F$

Die Abbildung „$-$“ ist per Definition ein Homomorphismus. Die Abbildung „$-^{(p)}$“ ($a^{(p)} \mapsto \overline{a^{(p)}}$) ist allerdings nur auf $O_{v^{(s)}} = \{ a^{(p)} \in \mathbb{Q}_p \mid v^{(p)}(a^{(p)}) \geq 0 \}$ definiert.

Wir definieren deshalb $(\tilde{a}^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}$ durch: $\tilde{a}^{(p)} = a^{(p)}$ falls $v^{(p)}(a^{(p)}) \geq 0$ und $\tilde{a}^{(p)} = 0$ sonst.

Dann gilt: $\{ p \mid \tilde{a}^{(p)} = a^{(p)} \} = \{ p \mid v^{(p)}(a^{(p)}) \geq 0 \} \in F$, d.h. $[(\tilde{a}^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] = [(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]$. Die „$-^{(p)}$" sind damit für alle $\tilde{a}^{(p)}$ definiert, und die Abbildung „$-$" demnach für alle $[(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]$ aus $O^*_{v^*} = \{ [(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in K^* \mid v^*([(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]) \geq 0 \}$ wohldefiniert.

Weiter gilt, dass $Kern(„-") = \{ [(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in K^* \mid \overline{[(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]} = \overline{[0^*]} \} = \{ [(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in K^* \mid \{ p \mid \overline{a^{(p)}} = \bar{0} \} = \{ p \mid v^{(p)}(a^{(p)}) > 0 \} \in F \} = \{ [(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}] \in K^* \mid v^*([(a^{(p)})_{p\in\mathbb{P}}]) > 0 \} = M^*_{v^*}$. Damit ist nach dem Homomorphiesatz $O^*_{v^*} / M^*_{v^*}$ isomorph zu $\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p / F$.

Es gilt also: $\overline{\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Q}_p / F} = O^*_{v^*} / M^*_{v^*} \simeq \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p / F$.

Mit der selben Argumentation erhalten wir auch $\overline{\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p((X)) / F} \simeq \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p / F$.

Das Ultraprodukt $\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p / F$ hat die Charakteristik 0, denn es gilt: für eine Primzahl q enthält die Menge $\{ p \mid char(\mathbb{F}_p) = q \}$ genau ein Element, d.h. sie liegt nicht in F (weil F Nicht – Haupt – Ultrafilter ist) => $\{ p \mid char(\mathbb{F}_p) \neq q \}$ liegt in F (wegen der Ultrafiltereigenschaft von F). Nach $Satz 4$, i) ist das gleichbedeutend mit $char(\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p / F) \neq q$. Weil q beliebig war, ist also $char(\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p / F) \neq q$ für alle q aus $\mathbb{P}$, d.h. $char(\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p / F) = 0$.

(K^*, v^*, Γ^*) und (L^*, w^*, Γ^*) erfüllen somit auch GV3.

Nach dem obigen Saturiertheitstheorem sind die Körper (K^*, v^*, Γ^*) und (L^*, w^*, Γ^*) saturiert.(GV4)

(K^*, v^*, Γ^*) und (L^*, w^*, Γ^*) erfüllen also GV1 bis GV4 .

Zusätzlich erfüllen sie auch die Eigenschaften **E1** und **E2**, denn $\mathbb{F}_p((X))$ ist $C_2(d)$ - Körper und $\mathbb{Q}_p$ ist für $p \in \mathbb{P}$ nach der Annahme im Beweis des Satzes von Ax – Kochen kein $C_2(d)$ - Körper. Daraus folgt nach $Satz 4$ aber schon, dass auch $K^* = \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Q}_p / F$ kein $C_2(d)$ - Körper ist. Wenn man für A_d einen Filter nach Bemerkung(Filter) 3.) wählt gilt auch, dass $L^* = \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p((X)) / F$ ein $C_2(d)$ - Körper ist.

Damit haben wir zwei bewertete Körper konstruiert, welche die geforderten Vorraussetzungen erfüllen.

Um den Beweis des Satzes von Ax – Kochen zu schließen, muss noch der Nachweis des verwendeten Theorems erfolgen. Hierfür ist ein **Lemma** von eigenständigem Interesse:

Lemma:

Vorraussetzung:

F_0 ist abzählbarer Unterkörper von K_1

Behauptung:

Es existiert eine abzählbare Erweiterung F' von F_0 so dass $v_1(F')$ rein in $\Gamma = v_1(K_1)$

Beweis:

Wir setzen $\Gamma_0 = v_1(F_0)$ und $\hat{\Gamma}_0 = \{ \gamma \in \Gamma \mid m\gamma \in F_0 \text{ für ein } m \geq 1 \}$

$\hat{\Gamma}_0$ heißt relative divisible Hülle in Γ und ist dementsprechend rein in Γ. Denn es ist $\Gamma / \hat{\Gamma}_0$ torsionsfrei. Das ist folgendermaßen zu sehen:

Nach Definition ist zu zeigen: für alle x aus Γ gilt: $nx = 0 \Rightarrow x = 0$

Dementsprechend hier: für alle x aus Γ gilt: nx liegt in $\hat{\Gamma}_0 \Rightarrow x$ liegt in $\hat{\Gamma}_0$

Das gilt aber offensichtlich, weil $nx \in \hat{\Gamma}_0$ ja nur bedeutet:

$nx \in \Gamma$ und $mnx \in \Gamma_0$ für ein $m \geq 1 \Rightarrow \tilde{m}\, x \in \Gamma_0$ mit $\tilde{m} = mn \geq 1 \Rightarrow x \in \hat{\Gamma}_0$ (denn $x \in \Gamma$ nach Definition)

Mit F_0 (nach Vorraussetzung) sind auch Γ_0 und $\hat{\Gamma}_0$ abzählbar.

Ersteres versteht sich von selbst, zweiteres klärt sich folgendermaßen: $\hat{\Gamma}_0 = \bigcup_m A_m$, wobei

$A_m = \{ \gamma \in \Gamma \mid m\gamma \in F_0 \}$

Damit ist $\hat{\Gamma}_0$ abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, wobei sich die Abzählbarkeit der A_m aus der Nullteilerfreiheit des Körpers F_0 ergibt: Sei m beliebig aber fest und g aus F_0 mit

$g = m\gamma = m\tilde{\gamma}$ ($\gamma, \tilde{\gamma} \in \Gamma$) $\Rightarrow 0 = m(\gamma - \tilde{\gamma})$ also: $\gamma = \tilde{\gamma}$

Mit anderen Worten: Durch jedes der abzählbar vielen m werden höchstens abzählbar viele $\gamma \in \Gamma$ bestimmt, weil für jedes der abzählbar vielen $g \in F_0$ höchstens ein $\gamma \in \Gamma$ die Gleichung $g = m\gamma$ erfüllt.

Sei $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Aufzählung der Elemente aus $\hat{\Gamma}_0$.

Der Grenzwert F' = $\bigcup_n F_n$ der noch zu konstruierenden monotonen Folge ($F_n)_{n=1}^{\infty}$ mit:

- F_n ist abzählbarer Unterkörper von K_1
- $\gamma_n \in v_1(F_{n+1})$
- $v_1(F_{n+1}) \subset \hat{\Gamma}_0$

erfüllt dann die Bedingung des Lemmas:
F' ist abzählbarer Unterkörper von K_1
• F' ist abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, und daher selbst abzählbar
• F' ist Grenzwert einer monotonen Folge von Unterkörpern in K_1, und damit selbst Unterkörper (zum Nachweis der Körperaxiome genügt bereits ein F_n (n groß))
und $v_1(F')$ ist rein in Γ, denn $v_1(F') = \hat{\Gamma}_0$
Beweis: „$\subset$“: $v_1(F') = v_1(\bigcup_n F_n) = \bigcup_n v_1(F_n) \subset \bigcup_n \hat{\Gamma}_0 = \hat{\Gamma}_0$

„ $\supset$“: $g \in \hat{\Gamma}_0$ => es existiert ein n so, dass $\gamma_n = g$ => $g \in v_1(F_{n+1}) \subset v_1(F')$
Konstruktion der (F_n) mit den geforderten Eigenschaften über vollständige Induktion:
$n = 0$: - F_0 ist abzählbarer Unterkörper von K_1(nach Vorraussetzung)
- $\gamma_0 \in v_1(F_1) \subseteq \hat{\Gamma}_0$(ist Forderung an F_1 => gleich allg.)

$n \to n+1$: Konstruktion von F_{n+1} mit den geforderten Eigenschaften:
Man betrachtet für n das γ_n und sucht folgendermaßen nach einem geeignetem F_{n+1}:
$\gamma_n \in \hat{\Gamma}_0 \subset \Gamma$ (i.B. : $\gamma_n \neq$ „∞“). $\exists$ m ≥ 1 mit: $m\gamma_n \in \Gamma_0$ (wegen der Definition von $\hat{\Gamma}_0$)
und $\exists\ x \in K_1^x$: $v_1(x) = \gamma_n$ ($\hat{\Gamma}_0 \subset \Gamma$)
Die Abbildungseigenschaften von Bewertungen liefern dann: $v_1(x^m) = mv_1(x) = m\gamma_n = v_1(a)$ für ein $a \in F_0^x \subset F_n^x$, da nach Definition von $\hat{\Gamma}_0$ $m\gamma_n \in \Gamma_0$ für ein $m \geq 1$ und $v_1(0)$ = „∞“
Da x und a in K_1^x liegen, liegt auch x^m / a in K_1^x und $v_1(x^m / a) = 0$ => $\overline{x^m / a} = \bar{c}$ für ein c aus K_1^x => $\overline{x^m / ac} = \bar{1}$, da die Abb. $''-''$ ein Homomorphismus ist.
(zum letzten Punkt: x^m / a ist ein möglicher Kandidat für das nicht eindeutig bestimmte c. Wir suchen im Folgenden aber stets besser geeignete Vertreter.)
Annahme1:
$\bar{c}$ ist algebraisch über $\overline{F_n}$

Nach Annahme gibt es ein $\overline{f} \in \overline{F_n}[X]$, das Minimalpolynom (und damit i.B. irreduzibel) von $\overline{c}$ über $\overline{F_n}$ ist. Die Charakteristik von k ($char(k) = 0$) liefert die Separabilität und daher ist $\overline{c}$ eine einfache Nullstelle, das heißt $\overline{f}(\overline{c}) = 0 \neq \overline{f}'(\overline{c})$, $m := grad(\overline{f})$.

Aus dieser Äquivalenzklasse $\overline{f}$ wählen wir uns einen Repräsentanten $f \in (O_1 \cap F_n)[X]$ dessen Grad natürlich nicht kleiner als m sein kann. Dies ergibt sich daraus, dass $\overline{a_m} = \overline{1}$ und damit ungleich Null ist. Somit können wir o.B.d.A. f als normiertes Polynom vom Grad m annehmen. (Wir nehmen also Abstand davon, höhere Potenzen in X zu ergänzen, deren Koeffizienten positiv bewertet sind und daher in $\overline{f}$ nicht effektiv auftauchen. Diese alternativen Polynome wären zudem nicht normiert.)

Der von uns gewählte Repräsentant f ist also ein Polynom aus $(O_1 \cap F_n)[X]$ für das gilt:

1.) f hat den Grad m

2.) f ist normiert

3.) f ist primitiv

4.) f ist irreduzibel über F_n

Daß $f \in (O_1 \cap F_n)[X]$ gilt, ist bereits klar. 1.) und 2.) ist Konvention. Die Primitivität von f liegt direkt in der Normiertheit und Nichtnegativität der Bewertung auf den Koeffizienten von f. Es bleibt also lediglich noch die Irreduzibilität über F_n zu zeigen. Diese folgt aber sofort aus LemmaV3, da $\overline{f}$ irreduzibel ist.

Die einfache Nullstelle $\overline{c}$ von $\overline{f}$ kann mit Hensel's Lemma zu einer Nullstelle $c_1 \in K_1$ des normierten Polynoms $f \in O_1[X]$ geliftet werden (da K_1 henselscher Körper ist), das heißt, $f(c_1) = 0$ und $\overline{c_1} = \overline{c}$. (Hierbei wurde f nun als Polynom aus $K_1[X]$ betrachtet.)

Adjungieren wir dieses c_1 zu F_n, so gelangen wir wegen der Irreduzibilität von f und $\overline{f}$ zu den Körpererweiterungen $F_n(c_1)$ und $\overline{F_n(c_1)}$ mit:

- $[F_n(c_1) : F_n] = \deg(f) = m < \infty$
- $[\overline{F_1(c_1)} : \overline{F_n}] = \deg(\overline{f}) = m < \infty$

Nach der fundamentalen Ungleichung (vgl. Chevalleys Fortsetzungssatz) ist das Produkt aus Verzweigungsindex e := $[v_1(F_n(c_1)) : v_1(F_n)]$ und Restklassengrad f = $[\overline{F_n(c_1)} : \overline{F_n}]$ durch m (den Grad der Körpererweiterungen) beschränkt. Dies liefert uns e = 1 (also $v_1(F_n(c_1)) = v_1(F_n)$), etwa folgendermaßen:

Weil $c_1 \in F_n(c_1)$, $F_n \subset F_n(c_1)$ und weil „–" ein Homomorphismus ist, ergibt sich unmittelbar:

$\overline{c_1} \in \overline{F_n(c_1)}$, $\overline{F_n} \subset \overline{F_n(c_1)}$ und $\overline{F_n}(\overline{c_1}) \subset \overline{F_n(c_1)}$.

Mit der fundamentalen Ungleichung folgt:
$[F_n(c_1):F_n] = \deg(f) = m \geq$ ef $=$ e $[\overline{F_1(c_1)}:\overline{F_n}] =$ e$[\overline{F_n(c_1)}:\overline{F_n}(\overline{c_1})]\,[\overline{F_n}(\overline{c_1}):\overline{F_n}] =$
e$\deg(\overline{f})\,[\overline{F_n(c_1)}:\overline{F_n}(\overline{c_1})]$.
Mit $\deg(f) = \deg(\overline{f})$ ergibt sich somit: e = 1 und zudem $\overline{F_n}(\overline{c_1}) = \overline{F_n(c_1)}$ (weil der zugehörige Index 1 ist).

Annahme2:
$\overline{c}$ ist transzendent über $\overline{F_n}$
Wäre c algebraisch über F_n, so wäre auch $\overline{c}$ algebraisch über $\overline{F_n}$. Aus der Annahme das $\overline{c}$ transzendent über $\overline{F_n}$ ist ergibt sich also (durch Kontraposition), dass auch c transzendent über F_n ist. Damit ergibt sich aber für $c_1 :=\ c$ schon direkt aus $v_1(c) = 0$ und GV3, dass $v_1(F_n(c_1)) = v_1(F_n)$. (weil für X hier wieder c zu suchen ist, braucht von v_1 nicht zu w übergegangen werden: $v_1((F_n(c))^x) = v_1(F_n^x)$.)

Da sich für $p(X) = X^m - ac_1 \in F_n(c_1)[X]$ $\sqrt[m]{ac_1}$ als Nullstelle ergibt, ist für $F_{n+1} := F_n(c_1, \sqrt[m]{ac_1})$ in beiden Fällen ($\overline{c}$ algebraisch/transzendent über $\overline{F_n}$) $F_{n+1}/F_n(c_1)$ algebraisch . Demnach ist $v_1(F_{n+1})/v_1(F_n)$ eine Torsionsgruppe
($v_1(F_{n+1})/v_1(F_n(c_1))$ ist Torsionsgruppe, denn F_{n+1} ist eine algebraische Körpererweiterung über $F_n(c_1)$ => $v_1(F_{n+1})/v_1(F_n)$ ist Torsionsgruppe, da $v_1(F_n(c_1)) = v_1(F_n)$).
Sei γ aus $v_1(F_{n+1})$. Dann existiert ein m_n aus N mit: $m_n\,\gamma \in v_1(F_n)$. Damit existiert auch ein $m_{n-1} \in N$ mit: $m_{n-1}\,m_n\,\gamma \in v_1(F_{n-1})$. So kann man weiter iterativ für jedes i aus $\{\ n-2, \ldots, 0\ \}$ ein m_i finden, so dass $m_i\,m_{i+1} \ldots m_{n-1}\,m_n\,\gamma \in v_1(F_i)$. Das heißt, mit $m = \prod_{i=0}^{n} m_i$ gilt: $m\,\gamma \in v_1(F_0) = \Gamma_0 \Rightarrow \gamma \in \hat{\Gamma}_0$ (nach Definition von $\hat{\Gamma}_0$).
Somit folgt: $v_1(F_{n+1}) \subseteq \hat{\Gamma}_0$.
Das $f(Z) = Z^m - x^m / ac_1 \in K_1[Z]$ ist sogar aus $O_1[Z]$, denn $v_1(1) = 0$ und $\overline{x^m / ac_1} = \overline{1}$ (also $v_1(x^m / ac_1) = 0$) und $\overline{1}$ ist einfache Nullstelle von $\overline{f}$, $\overline{f}(\overline{1}) = \overline{1}^m - \overline{1} = \overline{0}$ aber $\overline{f}'(\overline{1}) = m\,\overline{1}^{m-1} = m \neq 0$ (wegen $char(k) = 0$). Mit dem henselschen Lemma kann diese Nullstelle geliftet werden, d.h. $\exists\ z \in \mathrm{O} \subset K_1 :\ f(z) = 0,\ \overline{z} = \overline{1}$ und i.B. $v_1(z) = 0$.
Nebenbei: $x/z = \sqrt[m]{ac_1}$, denn $0 = f(z) = z^m - x^m / ac_1 \Rightarrow x^m = ac_1 z^m \Rightarrow x/z = \sqrt[m]{ac_1}$.
Bleibt nur noch zu zeigen, dass $\gamma_n \in F_{n+1}$. Das ist mit $v_1(z) = 0$ folgendermaßen klar:
$\gamma_n = v_1(x) = v_1(x) - 0 = v_1(x/z) = v_1(\sqrt[m]{ac_1}) \in v_1(F_{n+1})$.

Beweis des Theorems:

$F_0 = F(a_1,.....,a_n) \subset K_1$ ist abzählbar. Daraus folgt mit dem Lemma: $\exists$ ein abzählbarer Oberkörper $F' \subset K_1$ von F_0 so daß $\Gamma' = v_1(F')$ rein in Γ ist. Wir können o.B.d.A. F' Als henselsch annehmen, da die henselsche Hülle eine unmittelbare Erweiterung ist und somit $v_1(F'^h) = v_1(F')$ rein in Γ. Diese ist auch in K_1 enthalten, denn (K_1, v_1) ist henselsch, und abzählbar (da F' abzählbar und F'_h / F' algebraisch).

Um σ werterhaltend zu erweitern, wenden wir das Zorn'sche Lemma auf $\Omega = \{ (A,\tau) \mid F \subset A \subset F'$ mit: $v_1(A)$ ist rein in Γ', $\tau : A \to K_1$, $\tau|_F = \sigma$ werterhaltend $\}$ an:

- $\Omega \neq \emptyset$, weil (F,σ) in Ω liegt (da $v_1(F)$ nach Vorraussetzung rein in Γ ist.
- Ω ist unter aufsteigenden Ketten abgeschlossen, denn um die Eigenschaften zu überprüfen genügt jeweils ein genügend großes Element aus der Kette.
  => $\exists$ $(M, \sigma'') \in \Omega$ maximal, woraus mit der Vorbemerkung1 und der Tatsache, dass die henselsche Hülle eine unmittelbare Erweiterung ist, sofort folgt, dass $(M, v_1|_M)$ henselsch ist.

Man hat zusammengefasst also folgende Eigenschaften:

- $(M, v_1|_M)$ ist henselsch
- $v_1(M)$ ist rein in Γ'
- $\sigma'' : M \to K_2$ injektiv, $\sigma''|_F = \sigma$ mit: $v_2 \circ \sigma'' = v_1$ auf M

Bezeichnung:

$O = O_1 \cap M$

Annahme:

$M \subset F'$, $M \neq F'$

1. Fall:

$\exists$ ein x aus F' mit: $\bar{x} \in \overline{F'} \backslash \overline{M}$

$\alpha)$ $\bar{x}$ ist algebraisch über $\overline{M}$:

$\bar{x}$ habe das Minimalpolynom $\bar{f} \in \overline{M}[X]$. Wählt man sich einen beliebigen Repräsentanten $f \in O[X]$ von $\bar{f}$, so ist dieser auch irreduzibel.

F' ist henselsch, das heißt, man findet mit dem Henselschen Lemma eine Nullstelle von f in F' mit Restklasse $\bar{x}$, etwa $x \in F' \cap O_1$. Wegen der Restklassenerhaltung gilt: $\overline{\sigma''(f)} = \bar{f}$ und somit findet man auf die selbe Weise wie oben eine Nullstelle y des irreduziblen Polynoms $\sigma''(\bar{f})$ (wenn man f und $\bar{f}$ als Polynome über F' bzw. $F' \cap O_1$ auffasst), welche $\bar{y} = \bar{x}$ erfüllt, da $\sigma''(M)$ aufgrund der Isomorphie als bewerteter Körper zu M auch henselsch ist. Damit bekommen wir die Einbettung $\sigma''': M(x) \to K_2$, $\sigma'''|_M = \sigma''$, $\sigma'''(x) = y$, die den Homomorphismus σ'' erweitert. M ist henselsch, nach Definition ist also $v_1|_{M(x)}$ die eindeutige Erweiterung von $v_1|_M$ auf $M(x)$. $v_2 \circ \sigma'''$ ist aber Bewertung von $M(x)$ mit $v_2 \circ \sigma''' = v_1|_M$ auf M. Das heißt, $v_2 \circ \sigma''' = v_1|_{M(x)}$, sprich σ''' ist werterhaltend. $v_1(M(x))$ ($= v_1(M)$, da $v_1(x) = 0$) ist rein in Γ'. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von (M, σ'').

β) $\bar{x}$ ist transzendent über $\overline{M}$:

$\bar{x}$ ist transzendent über $\overline{M}$ => beliebige Repräsentanten $x \in F'$ und $y \in K_2$ der Restklasse $\bar{x}$ sind transzendent über M bzw. $\sigma''(M)$, denn wären sie Nullstellen eines Polynoms $\neq 0$ mit Koeffizienten aus dem Körper, so wären sie mit der Vorbemerkung2 Auch Nullstellen eines Polynoms mit Koeffizienten aus dem Bewertungsring und somit $\bar{x}$ Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten aus dem Restklassenkörpers.
Seien also $x \in F'$ und $y \in K_2$ beliebige Repräsentanten der Restklasse $\bar{x}$. Damit bekommen wir die Einbettung $\sigma''': M(x) \to K_2$, $\sigma'''|_M = \sigma''$, $\sigma'''(x) = y$, die den Homomorphismus σ'' erweitert. $v_1(x) = v_2(y) = 0$ => $v_1|_{M(x)}$ ist eindeutige Erweiterung von $v_1|_M$ auf $M(x)$ und $v_1(M(x)) = v_1(M)$ => (siehe oben) σ''' ist Werterhaltend und $v_1(M(x))$ ist rein in Γ', was ein Widerspruch zur Maximalität von (M, σ'') ist.

2. Fall:
$\overline{F'} = \overline{M}$ und es existiert ein x in F' so dass $v_1(x)$ nicht in $v_1(M)$ liegt.

Das bedeutet, dass $\overline{v_1(x)} \neq \bar{0}$, wobei $\bar{0}$ ($= 0 + v_1(M)$) das Nullelement der Menge $v_1(F')/v_1(M)$ ist. Da $v_1(F')/v_1(M)$ torsionsfrei ist, folgt dann: Für eine ganze Zahl k liegt k$v_1(x)$ in $v_1(M)$ (also k$\overline{v_1(x)} = \bar{0}$) genau dann, wenn k = 0. Für ein Element $v_1(m)$ + k$v_1(x)$ aus $v_1(M) + \mathbb{Z}\, v_1(x)$ gilt somit: $v_1(m)$ + k$v_1(x) = 0$ ⇔ k$v_1(x) = -v_1(m)$ ⇔ k$v_1(x)$ liegt in $v_1(M)$ (weil $-v_1(m)$ in $v_1(M)$ liegt, da $v_1(M)$ ein Körper ist) ⇔ k = 0 ⇔ $v_1(m)$ = --k$v_1(x)$ = 0. Daraus folgt, dass die Summe $v_1(M) + \mathbb{Z}\, v_1(x)$ eine direkte Summe ist.
Behauptung:

In diesem Fall muß x transzendent über M sein.
Beweis:
Angenommen, x sei algebraisch über M. Dann gibt es ein Polynom p(X) = $a_n X^n$ +…..+ a_0 mit p(x) = 0 => $\infty = v_1(0) = v_1((p(x)) = v_1(a_n x^n + \ldots + a_0) \geq \min \{ v_1(a_i x^i) = v_1(a_i) + iv_1(x) \}$ ($1 \leq i \leq n$). Hier gilt statt "≥" sogar "=", denn wegen der Direktheit der Summe gilt: $v_1(a_i x^i) \neq v_1(a_j x^j)$ für $i \neq j$ (denn: $v_1(a_i x^i) = v_1(a_j x^j) \Leftrightarrow v_1(a_i) + iv_1(x) = v_1(a_i) + jv_1(x) \Leftrightarrow i = j$) => $v_1(a_i x^i) = \infty$ für alle i mit $1 \leq i \leq$ n => $v_1(a_1) = \infty$ für alle i mit $1 \leq i \leq$ n => $a_i = 0$ für alle i mit $1 \leq i \leq$ n => p ≡ 0. Das ist ein Widerspruch zur Annahme dass x algebraisch über M ist. Die Bewertung $v_1 \mid_{M(x)}$ ist eindeutig bestimmt durch $v_1(c_0 + c_1 + \ldots + c_d x^d) = \min \{ v_1(c_i) + iv_1(x) \mid 0 \leq i \leq d \}$, wobei $c_0, \ldots, c_d$ aus M sind.
Wenn wir nun ein y aus K_2 wählen, so dass $v_2(y) = v_1(x)$, und auf $M(x)$ eine Erweiterung σ''' von σ'' definieren, indem wir x auf y schicken, so ist diese Erweiterung wieder werterhaltend.
Um einen Widerspruch zur Maximalität von σ'' zu erhalten, erweitern wir σ''' auf einen Unterkörper M^* von F', so dass $v_1(M^*)$ rein in Γ' ist. Wir können hier als M^* den relativen algebraischen Abschluß von $M(x)$ in F' nehmen.
Um das zu zeigen gehen wir wie folgt vor:
Wir setzen $\gamma = v_1(\alpha)$ für ein α aus F' und nehmen an, dass $m\gamma = v_1(a)$ für ein a aus $M(x)$ und ein $m \geq 1$ (d.h. $m\gamma$ liegt in $v_1(M^*)$ für ein $m \geq 1$). Um die Torsionsfreiheit von $v_1(F')/v_1(M^*)$ zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass γ in $v_1(M^*)$ liegt . Für $\alpha^m a^{-1}$ gilt: $v_1(\alpha^m a^{-1}) = mv_1(\alpha) - v_1(a) = m\gamma - m\gamma = 0$ und deshalb $\overline{\alpha^m a^{-1}} = \bar{c}$ für ein c aus $M(x)$ sowie $\overline{M(x)} = \overline{F'}$. Aus Hensels Lemma folgt nun, dass das Polynom $Z^m - \alpha^m / ac$ eine Nullstelle in F' besitzt. Sei z diese Nullstelle. Dann gilt: $z^m - \alpha^m / ac = 0 \Leftrightarrow z^m = \alpha^m / ac \Leftrightarrow (\alpha / z)^m = ac$. Weil a und c in $M(x)$ liegen, liegt auch ac in $M(x)$
(da $M(x)$ ein Körper ist) und somit in M^*. Also liegt $(\alpha / z)^m$ in M^* und damit auch α / z. Hieraus folgt aber, dass $v_1(\alpha / z)$ in $v_1(M^*)$ liegt. Nach Hensels Lemma gilt: $\bar{z} = \bar{1}$. Weil aber für jedes Element y aus $\bar{1}$ gilt: y = 1 + m mit m aus M_{v_1} => v_1(y) = v_1(1 + m) = $v_1(1)$ = 0 (da $v_1(1) = 0 < v_1(m)$, weil $v_1(m) > 0$), folgt auch $v_1(z) = 0$. => $v_1(\alpha / z)$ ($= v_1(\alpha)$ - $v_1(z)$) = $v_1(\alpha)$.
Das heißt, $v_1(\alpha)$ liegt in $v_1(M^*)$. Damit ist die Torsionsfreiheit von $v_1(F')/v_1(M^*)$ gezeigt.
Als M^* haben wir also den algebraischen Abschluß von $M(x)$ in F' gewählt. F' hatte die Charakteristik 0. Deshalb ist mit dem Satz vom primitiven Element jeder endlich erzeugte Unterkörper von M^* über M in einem Körper $M(x, \alpha)$ enthalten, wobei $\alpha \in$

M^* algebraisch ist über $M(x)$. Wir können das Bild von $M(x)$ unter v_1 als direkte Summe schreiben, also $v_1(M(x)) = \mathbb{Z}v_1(x) \oplus v_1(M)$. Da $M(x,\alpha)\ /M(x)$ endlich ist, gilt mit der fundamentalen Ungleichung: $v_1(M(x,\alpha))/\ v_1(M(x))$ ist Torsionsgruppe mit c Elementen. Setzen wir nun $\hat{\Gamma} = v_1(M(x)) = \mathbb{Z}v_1(x) \oplus v_1(M)$ und $\frac{1}{c}\hat{\Gamma} = \{\ \gamma \in v_1(M^*)\ \mid\ c\gamma \subset \hat{\Gamma}\ \}$ $\subset v_1(M^*)$, dann folgt, dass $[\frac{1}{c}\hat{\Gamma} : \hat{\Gamma}\ ] = c$ und $v_1(M(x,\alpha)) \subset \frac{1}{c}\hat{\Gamma}$ => $v_1(M(x,\alpha)) =$ $\frac{1}{c}\hat{\Gamma}$. Man kann sich als z somit ein beliebiges Element $z \in M^*$ wählen, so dass $v_1(z) =$ $\frac{1}{c}v_1(x)$. Damit ergibt sich $\frac{1}{c}\hat{\Gamma} = v_1(M(x,\alpha)) = \mathbb{Z}v_1(z) \oplus v_1(M)$, da $v_1(M)$ rein in Γ ist. Mit den selben Ü berlegungen wie am Anfang dieses Falles bekommen wir:

- z ist transzendent über M
- $v_1(M(z)) = \mathbb{Z}v_1(z) \oplus v_1(M) = v_1(M(x,\alpha))$
- σ'' lässt sich werterhaltend auf $M(z)$ erweitern

Diese Erweiterung ergibt mit der Vorbemerkung schon eine ebenfalls werterhaltende Erweiterung auf dem henselschen Abschluß von $M(z)$. Dieser enthält aber $M(x,\alpha)$, da $v_1(M(z)) = v_1(M(x,\alpha))$ und $\overline{M} = \overline{M(z)} = \overline{M(x,\alpha)} = \overline{F'}$, sprich $M(x,\alpha)$ eine unmittelbare Erweiterung von $M(z)$ ist, und der henselsche Abschluß die maximale unmittelbare Erweiterung ist. (siehe Satz H3).
Damit haben wir σ'' auf jeden endlich erzeugten Unterkörper von M^* über M Fortgesetzt und bekommen somit mit dem Saturiertheitstheorem angewandt auf K_2 eine werterhaltende Fortsetzung auf M^* was im Widerspruch zur Maximalität von M steht.

3. Fall
$\overline{F'} = \overline{M}$, $v_1(M) = v_1(F')$ und $x \in F' \setminus M$

$M \subset M(x) \subset F'$ => $v_1(M) \subset v_1(M(x)) \subset v_1(F') = v_1(M)$, d.h. $v_1(M) = v_1(M(x))$
=> $\overline{M} \subset \overline{M(x)} \subset \overline{F'} = \overline{M}$, also: $\overline{M(x)} = \overline{M}$
=> $M(x)$ ist echte unmittelbare Erweiterung von M. M ist aber henselsch , also ist x transzendent über M.
Wir gehen wie folgt vor:
Schritt1:
Wir suchen ein potentielles Bild $y \in K_2$ von x für eine Erweiterung von σ'' durch „lösen“ der Gleichungen $v_1(\ x\ -\ a\ ) = v_2(\ y\ -\ \sigma''(a))$ für alle a aus M mit dem Saturiertheitstheorem.
Schritt2:

Wir beweisen die Werterhaltung einer solchen Erweiterung, indem wir zeigen, dass für alle Polynome f aus $M[X]$ gilt: $v_1(f(x)) = v_2(\sigma''(f)(y))$

=> σ''': $M(x) \to K_2$, $\sigma'''\big|_M = \sigma''$, $\sigma'''(x) = y$ ist werterhaltende Erweiterung von σ'' und $v_1(M(x))$ ist minimal in Γ', was ein Widerspruch zur Maximalität von (M, σ'') ist.

Zu Schritt1:

Seien $a_1, \ldots, a_m \in M$ beliebig. Da $v_1(M) = v_1(F')$ finden wir zu jedem a_i ein b_i aus M^x so, dass $v_1(x - a_i) = v_1(b_i)$. Sei $1 \leq \mu \leq m$ so, dass $v_1(x - a_\mu) = \min\limits_{1 \leq i \leq m} v_1(x - a_i)$.

$\overline{F'} = \overline{M}$ => $\exists$ c aus M mit: $\overline{(x - a_\mu)/b_\mu} - \overline{c} = \overline{0}$. Sei $d = a_\mu + b_\mu \in M$

=> $v_1(x - d) = v_1(x - a_\mu - b_\mu c) = v_1(b_\mu(((x - a_\mu)/b_\mu) - c))) = v_1(b_\mu) + v_1(((x - a_\mu)/b_\mu) - c)) > v_1(b_\mu) = v_1(x - a_\mu) \geq v_1(x - a_i)$ $\forall$ $1 \leq i \leq m$ => $v_1(x - d) > v_1(x - a_\mu)$ => $v_1(d - a_i) = v_1((x - a_i) - (x - d)) = v_1(x - a_i) = v_1(b_i)$ => $v_2(\sigma''(d) - \sigma''(a_i)) = v_2(\sigma''(b_i)) = v_1(b_i) = v_1(x - a_i)$ => $y = \sigma''(d)$ tut's für $a_i \in M$ und $m \in N$. => $\exists$ $y \in K_2$ so dass für alle a aus M gilt: $v_2(y - \sigma''(a)) = v_1(x - a)$.

Zu Schritt2:

Behauptung:

$v_1(f(x)) = v_2(\sigma''(f)(y))$ für alle Polynome f aus $M[X]$

Beweis:

Induktion nach $n = \deg(f)$

$n = 1$:

gilt nach der Konstruktion von y in Schritt1

$n - 1 \to n$:

Da wir die Induktionshypothese auf einzelne Faktoren anwenden können und σ'' ein Homomorphismus ist, genügt es irreduzible Polynome vom Grad n zu betrachten.

Sei f aus $M[X]$ also ein irreduzibles Polynom vom Grad n.

Wir betrachten nun den m- dimensionalen Vektorraum V = $M + Mx + \ldots + Mx^{d-1}$. Dieser wird, indem wir modulo f rechnen, zu einem Körper isomorph zu der algebraischen Erweiterung $M[X]/(f)$ =: M_1 von M. Ein Produkt gh mit Elementen g, h aus V wird also mit dem eindeutig bestimmten r aus V identifiziert für das $gh = r + sf$ gilt mit einem s aus V. Wäre die so definierte Multiplikation kompatibel zu der Restriktion von v_1 auf V, d.h. $v_1(r) = v_1(g) + v_1(h) = v_1(gh)$ für alle g, h aus V, dann hätten wir mit M_1 eine echte, unmittelbare, algebraische Erweiterung von M gefunden, was im Widerspruch dazu steht, das M henselsch ist. Es muß also g, h aus V geben, für die $v_1(r) \neq v_1(g) + v_1(h) = v_1(gh)$

gilt. Zum einen folgt daraus, dass $v_1\ (f) = v_1((gh-r)/s) = -\ v_1(s) + v_1(gh-r) = -\ v_1(s) +$ $\min\ \{\ v_1(g) + v_1(h),\ v_1(r)\ \}$ gilt (1). Und zum anderen folgt mit der Induktionshypothese angewandt auf r, g, h wenn man x in den Bildern der Polynome durch y ersetzt: $v_1(\sigma''(r)) \neq v_1(\sigma''(g)) + v_1(\sigma''(h)) = v_1(\sigma''(gh))$ und somit $v_2(\sigma''(f)) =$ $v_2(\sigma''((gh-r)/s)) = -\ v_2(\sigma''(s)) + v_2(\sigma''(gh) - \sigma''(r)) = -\ v_2(\sigma''(s)) + \min\ \{\ v_2(\sigma''(g))$ $+\ v_2(\sigma''(h)),\ v_2(\sigma''(r))\ \}$ (2).

Mit der Induktionshypothese folgt aus (1) und (2) dann: $v_2(\sigma''(f)) = v_1\ (f)$.

Quellennachweis:

Valued Fields - Prestel/Engler
Lectures on Forms in Many Variables - Greenberg
Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie - Prestel