Universität Ulm
Abteilung für Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Patrick G. Walch
WS 04/05

Nachholklausur zu Höhere Mathematik I für Elektrotechniker

08.04.2005, 09.00 Uhr - 12.00 Uhr

1. Bestimme, falls möglich, Minimum, Maximum, Infimum und Supremum von
$$M := \left\{ \frac{-1}{m} + \frac{2}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$$
und begründe Deine Angaben. (4 Punkte)

2. Berechne Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der komplexen Zahl
$$z := \frac{(i+3)\,\overline{(1-i)}}{i-3}$$
(4 Punkte)

3. Es seien die Matrizen $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben.
   (a) Berechne $\det B$.
   (b) Berechne A^{-1}.
   (c) Bestimme die Determinanten der Matrizen B^{-1} und $3\,B$. (8 Punkte)

4. Seien α und β reelle Zahlen mit $\beta > \alpha > 0$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch
$$a_1 := \alpha, \quad \text{und} \quad a_n := \frac{1}{3}\,(2\,a_{n-1} + \beta) \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$
Zeige dass die Folge konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert. (7 Punkte)

5. Untersuche, ob folgende Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren:
$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} \qquad \text{(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^5+1}}$$
(10 Punkte)

6. Berechne den Wert der folgenden Reihen:
$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \qquad \text{(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^{-k+2}}$$
(8 Punkte)

7. Berechne den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen:
$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} k^k\, x^k \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{5^{k+1}}$$
(8 Punkte)

8. Sei $f(x) := \dfrac{1}{1-2x}$ für $2x \neq 1$. Bestimme (mit Beweis) $f^{(n)}(x)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. (8 Punkte)

9. Zeige, dass die Gleichung $e^{-x} = x + c$ für jedes beliebige $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt. (4 Punkte)

10. Bestimme alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) := x^2\, e^x$. (6 Punkte)

11. Berechne die (ersten) Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) := \dfrac{1+\sin x}{x^2+1}$ (b) $f(x) := e^{(x^e)}$ (10 Punkte)

12. Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^2 x\, e^{(x^2)}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}\, dx$ (6 Punkte)

13. Entscheide, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren und berechne im Falle der Konvergenz den Wert:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$ (4 Punkte)

14. Untersuche die folgende Menge auf lineare Unabhängigkeit im angegebenen Vektorraum:

$$T := \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 11 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$ (4 Punkte)

15. (a) Bestimme das charakteristische Polynom der Matrix A aus Aufgabe 3.
(b) Untersuche, ob die Matrix A aus Aufgabe 3 diagonalisierbar ist. (4 Punkte)

16. Orthogonalisiere die folgenden Vektoren:

$$w_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; w_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; w_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ (3 Punkte)

17. Kreuze auf dem Beiblatt an, ob du folgende Aussagen für richtig oder falsch hältst. Wenn du dir nicht sicher bist, kannst du raten oder keine Antwort ankreuzen. Für jedes richtig platzierte Kreuz erhältst du einen Punkt, für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Bei negativem Punktesaldo wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet.

(a) Jede beschränkte Menge komplexer Zahlen besitzt ein Supremum.
(b) Eine ungerade Funktion kann nicht gerade sein.
(c) Für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n < b_n \;\forall\; n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
(d) Eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ kann für jedes $x \in \mathbb{R}$ divergent sein.
(e) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
(f) Jede differenzierbare Funktion ist integrierbar.
(g) Jede nicht leere Teilmenge eines Vektorraums ist auch ein Unterraum.
(h) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ so, dass $|f|$ stetig auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist, so ist es auch f^2.
(i) Die Menge aller Polynome ist ein Vektorraum.
(j) Ist f gerade und stetig auf $\mathbb{R}$, so folgt $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \neq 0$.

(10 Punkte)

Viel Erfolg !!