WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

0. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1+1=3 P) Sei $t \in \mathbb{R}$ eine relle Zahl und A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Diagonalisieren Sie A, d.h. bestimmen Sie eine invertierbare Matrix B so dass BAB^{-1} eine Diagonal-Matrix ist. Kann man B mit rellen Einträgen wählen?

(c) Berechnen Sie A^n für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$. Für welche Werte von t gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so dass A^n die Identitätsmatrix ist?

Aufgabe 2: (1/2+1/2+1+1=3 P) Sei wieder $t \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Für welche Werte von t ist A diagonalisierbar?

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$ der 2-dimensionale reelle Standard-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ die von der Matrix A induzierte lineare Abbildung. Finden Sie einen eindimensionalen Unterraum $W \subset V$, unabhängig von t, sodass $\varphi(W) \subset W$. Bestimmen Sie die von φ induzierte lineare Abbildung

$$V/W \to V/W, \quad v + W \mapsto \varphi(v) + W.$$

(Bem.: da V/W eindimensional ist, ist diese Abbildung durch ein Skalar gegeben.)

(d) Für welche Werte von t gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so dass A^n die Identitätsmatrix ist?

Aufgabe 3: (2+2+2=6 P) Es seien $e_1, \dots, e_8 \in \mathbb{R}^3$ die acht Ecken eines Würfels im euklidischen Raum:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl} e_1 & = & (-1,-1,-1) & e_5 & = & (-1,1,-1) \\ e_2 & = & (1,-1,-1) & e_6 & = & (1,1,-1) \\ e_3 & = & (-1,-1,1) & e_7 & = & (-1,1,1) \\ e_4 & = & (1,-1,1) & e_8 & = & (1,1,1) \end{array}$$

Sei $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Rotation um die y-Achse, die den Würfel in sich überführt und auf den Ecken $e_1, \dots, e_8$ die Permutation

$$\sigma_1 = (1\ 2\ 4\ 3)\,(5\ 6\ 8\ 7)$$

induziert. Weiterhin sei $L \subset \mathbb{R}^3$ die Diagonalachse des Würfels, die die Ecken e_1, e_8 enthält und $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Rotation um L, die die folgende Permutation induziert:

$$\sigma_2 = (2\ 3\ 5)\,(4\ 7\ 6).$$

(a) Stellen Sie φ_1, φ_2 durch Matrizen A_1, A_2 dar.

(b) Berechnen Sie $\varphi_1 \circ \varphi_2$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1$ und die dazugehörenden Permutationen.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_1, A_2, $A_1 A_2$ und $A_2 A_1$ (Hinweis: verwende ein geometrisches Argument, keine Rechnung).

Abgabe: am Donnerstag, 27.10. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).