WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1+1=3 P) Seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Das Bild $\varphi(G)$ von φ ist eine Untergruppe von H.

(b) Der Kern $\varphi^{-1}(e)$ von φ ist eine Untergruppe von G.

(c) Der Homomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn der Kern nur aus dem neutralen Element besteht.

Aufgabe 2: (1+1+2=4 P) Seien G_1 und G_2 Gruppen. Zeigen Sie:

(a) Das kartesische Produkt $G_1 \times G_2$ ist mit der Verknüpfung

$$(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) \mapsto (a_1 \circ a_2, b_1 \circ b_2)$$

eine Gruppe.

(b) Ist H eine kommutative Gruppe und sind $\varphi_1 : G_1 \to H$ und $\varphi_2 : G_2 \to H$ Gruppenhomomorphismen, so ist die Abbildung

$$G_1 \times G_2 \to H, \qquad (a_1, a_2) \mapsto \varphi_1(a_1) \circ \varphi_2(a_2)$$

wieder ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Die Aussage (b) wird falsch, wenn man die Voraussetzung, dass H kommutativ ist, fallenlässt (Gegenbeispiel!).

Aufgabe 3: (1+1+1+2=5 P) Sei $n \geq 3$. Wir definieren die Permutationen

$$r := (\,1\;2\;\cdots\;n\,)$$

und

$$s := \begin{cases} (\,1\;n\,)(\,2\;\,n{-}1\,)\cdots(\,m\;\,m{+}1\,), & \text{für } n = 2m, \\ (\,1\;\,n{-}1\,)(\,2\;\,n{-}2\,)\cdots(\,m\;\,m{+}1\,), & \text{für } n = 2m+1. \end{cases}$$

als Elemente der Gruppe S_n. Die *Diedergruppe* der Ordunung $2n$ ist definiert als die von r und s erzeugte Untergruppe von S_n. Zeigen Sie:

(a) Es gelten die Relationen

$$r^n = s^2 = \mathrm{Id}, \qquad srs^{-1} = r^{-1}.$$

(b) Die von r erzeugte zyklische Untergruppe $Z \subset D_n$ ist ein Normalteiler der Ordnung $|Z| = n$ und vom Index $[D_n : Z] = 2$. Insbesondere hat D_n genau $2n$ Elemente.

(c) Die von s erzeugte Untergruppe $H \subset D_n$ ist *kein* Normalteiler. Die Abbildung

$$Z \to G/H, \qquad r^k \mapsto r^k H$$

ist eine Bijektion. Insbesonder hat jedes Element von D_n eine eindeutige Darstellung der Form $r^k s^j$ mit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in \{0, 1\}$.

(d) Nun sei n eine gerade Zahl. Bestimmen Sie die Menge aller Konjugiertenklassen von D_n.

Aufgabe 4: (1+1+2=4 P) Für $n \geq 3$ sei $T_n \subset \mathbb{R}^2$ das reguläre n-Eck mit den Ecken

$$P_k := (\cos\frac{2\pi(k-1)}{n}, \sin\frac{2\pi(k-1)}{n}) \in \mathbb{R}^2, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Sei $S(T_n)$ die *volle* Symmetriegruppe von T_n. Nach der Vorlesung besteht $S(T_n)$ aus den Elementen der orthogonalen Gruppe O_2, deren zugehörige lineare Transformation des $\mathbb{R}^2$ die Ecken P_k untereinander permutiert. Insbesondere erhält man einen injektiven Gruppenhomomorphismus $S(T_n) \hookrightarrow S_n$.

(a) Bestimmen Sie Elemente aus $S(T_n)$, die auf die Elemente $r, s \in S_n$ (siehe Aufgabe 3) abgebildet werden.

(b) Zeigen Sie: Das Bild von $S(T_n)$ in S_n ist die Diedergruppe D_n.

(c) Bestimmen Sie für jede Konjugiertenklasse von $S(T_n)$ einen Vertreter, in Form einer Drehung (um einen gewissen Winkel) oder als Spiegelung (an einer gewissen Gerade).

Abgabe: am Donnerstag, 3.11. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).