WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

10. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1+1+1=4 P)

(a) Bestimmen Sie für jede natürliche Zahl n ein irreduzibles Polynom $f_n \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n.

(b) Sei $\bar{\mathbb{Q}}$ der Körper der algebraischen Zahlen (d.h. der komplexen Zahlen, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind). Zeigen Sie: die Erweiterung $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ ist algebraisch, aber *nicht* endlich. (Hinweis: benutzen Sie (a) und den Gradsatz; das ist Satz III.1.3 der Vorlesung oder Satz 3.2.5 bei Lütkebohmert.)

(c) Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein über $\mathbb{R}$ irreduzibles Polynom. Dann ist der Grad von f entweder 1 oder 2. (Hinweis: benutzen Sie $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.)

(d) Schliessen Sie aus (c): jedes reelle Polynom $\mathbb{R}[X]$ von ungeradem Grad hat eine reelle Nullstelle.

Aufgabe 2: (1+1+1+1=4 P) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_n := \exp(2\pi i/n)$,

$$\phi_n = \prod_{a \in (\mathbb{Z}/n)^\times} (X - \zeta_n^a) = \frac{X^n - 1}{\prod_{d|n, d<n} \phi_d}$$

das $n$te Kreisteilungspolynom und $K_n := \mathbb{Q}[\zeta_n] \subset \mathbb{C}$ der $n$te Kreisteilungskörper.

(a) Berechnen Sie ϕ_n für $n \leq 10$.

(b) Sei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\phi_{p^k} = X^{(p-1)p^{k-1}} + X^{(p-2)p^{k-1}} + \cdots + 1.$$

(c) Sei $\alpha_n := \zeta_n + \zeta_n^{-1} = 2\cos(2\pi/n)$. Zeigen Sie:

$$[K_n : \mathbb{Q}[\alpha_n]] = 2.$$

(d) Angenommen, ϕ_n ist irreduzibel. Zeigen Sie, dass es für jedes $a \in (\mathbb{Z}/n)^\times$ genau einen Körperautomorphismus

$$\sigma_a : K_n \xrightarrow{\sim} K_n$$

gibt mit $\sigma_a(\zeta_n) = \zeta_n^a$. Warum ist die Voraussetzung, dass ϕ_n irreduzibel ist, wichtig?

Aufgabe 3: (1+1+1+1=4 P) Sei nun $\zeta := \zeta_9$ und $\alpha = \alpha_9 := \zeta + \zeta^{-1}$ wie in Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 3, das α als Nullstelle hat. (Hinweis: schreiben Sie die Elemente $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ des Körpers $\mathbb{Q}[\zeta]$ als Linearkombinationen von $\zeta^3, \ldots, \zeta^{-3}$. Finden Sie eine nichttriviale Relation zwischen diesen Elementen.)

(b) Zeigen Sie: g ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

(c) Schliessen Sie aus (b) und Aufgabe 2 (c):

$$[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 3, \quad [\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = 6.$$

Insbesondere ist das Kreisteilungspolynom ϕ_9 irreduzibel.

(d) Zeigen Sie:

$$\mathbb{Q}[\zeta] = \mathbb{Q}[\alpha, \zeta^3].$$

(Hinweis: $\zeta^3 = \zeta_3$ ist eine dritte Einheitswurzel.)

Abgabe: am Donnerstag, den 19.1. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).