WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

11. Übungsblatt

Die Punkte dieses Übungsblattes sind Bonuspunkte!

Aufgabe 1: (1+1+1=3 P) Sei wie üblich $\zeta_n := \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Sind n, m teilerfremd, so gilt

$$\mathbb{Q}[\zeta_{nm}] = \mathbb{Q}[\zeta_n, \zeta_m]$$

(als Unterkörper von $\mathbb{C}$).

(b) Sind n, m teilerfremd, und sind sowohl das reguläre n- als auch das reguläre m-Eck konstruierbar, so ist auch das reguläre nm-Eck konstruierbar. (Geometrische Argumente sind genauso erlaubt wie körpertheoretische.)

(c) Die Aussagen in (a) und (b) sind i.A. falsch ohne die Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Aufgabe 2: (1+1+1+1=4 P)

(a) Bestimme das Minimalpolynom von $\alpha := \zeta_5 + \zeta_5^{-1}$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimme das Minimalpolynom von ζ_5 über dem Körper $K := \mathbb{Q}[\alpha]$.

(c) Zeige:

$$\mathbb{Q}[\zeta_8] = \mathbb{Q}[i, \sqrt{2}].$$

(d) Schließe aus (a)-(c): die Kreisteilungspolynome ϕ_5 und ϕ_8 sind irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3: (1+1+1+2=5 P) Sei

$$f := X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{F}_3[X],$$

$K/\mathbb{F}_3$ ein Zerfällungskörper von f und $\alpha \in K$ eine Nullstelle, $f(\alpha) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Das Polynom f ist irreduzibel über $\mathbb{F}_3$. Daher ist K ein (der) Körper mit 27 Elementen.

(b) Es gilt $\alpha^{13} = 1$. (Hinweis: benutze $13 = 8 + 4 + 1$.)

(c) In $K[X]$ hat man folgende Zerlegungen:

$$\bar{\phi}_{13} := \frac{X^{13} - 1}{X - 1} = \prod_{i=1}^{12} (X - \alpha^i)$$

und

$$f = (X - \alpha)(X - \alpha^3)(X - \alpha^9).$$

(Hinweis: die Abbildung $\beta \mapsto \beta^3$ ist ein Automorphismus der Erweiterung $K/\mathbb{F}_3$.)

(d) Bestimme einen von f verschiedenen irreduziblen Faktor $g \in \mathbb{F}_3[X]$ von $\bar{\phi}_{13}$ (es reicht nicht, die Zerlegung von g in $K[X]$ anzugeben!).

Abgabe: am Donnerstag, den 26.1. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).