WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

12. Übungsblatt

Aufgabe 1: ($6 \cdot 1$ P) Sei $\zeta = \zeta_7 = \exp(2\pi i/7)$ und $K := \mathbb{Q}[\zeta]$. Wir nehmen an, dass $K/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist und dass es einen Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{Z}/7)^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}), \quad a \mapsto \sigma_a$$

gibt, der bestimmt ist durch die Gleichung $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$.

(a) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}/7)^\times$.

(b) Sei $\alpha := \zeta + \zeta^{-1} \in K$. Bestimmen Sie alle Elemente $a \in (\mathbb{Z}/7)^\times$ mit $\sigma_a(\alpha) = \alpha$.

(c) Sei

$$\beta := \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4 - \zeta^5 - \zeta^6 \in K.$$

Bestimmen Sie alle Elemente $a \in (\mathbb{Z}/7)^\times$ mit $\sigma_a(\beta) = \beta$.

(d) Zeigen Sie: $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 3$, $[\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}] = 2$ und $K = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$. (Hinweis: benutzen Sie den Hauptsatz der Galoistheorie.)

(e) Bestimmen Sie die Minimalpolynome über $\mathbb{Q}$ von α und β. (Hinweis: vergleiche mit Aufgabe 3 (a) vom 10. Blatt.)

(f) Ist $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung? Wenn ja, bestimmen Sie ihre Galois-Gruppe.

Aufgabe 2: (1+1+1=3 P) Die Diskriminante des Polynoms $f = X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$ ist $D = -4p^3 - 27q^2$. Zeigen Sie:

(a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) f hat drei verschiedene reelle Nullstellen.

(ii) $D > 0$.

(iii) Die Ableitung f' hat zwei reelle Nullstellen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $f(\alpha) > 0$ und $f(\beta) < 0$.

(b) Angenommen, f sei irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und habe mindestens eine nichtreelle Nullstelle. Dann ist die Galoisgruppe von f isomorph zu S_3.

(c) Bestimmen Sie die Galoisgruppen von

$$X^3 + X + 1, \quad X^3 + X^2 - 2X - 1, \quad X^3 + X^2 - 2X - 3.$$

Aufgabe 3: (1+1+1+1=4 P) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei G eine Gruppe, die auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4\}$ treu und transitiv operiert. Dann ist G genau dann isomorph zu S_4, wenn es ein Element $x \in X$ gibt mit nichttrivialem Stabilisator, $G_x \neq \{1\}$.

(b) Jeder faktorielle Ring ist ein Hauptidealring.

(c) Sei K ein Körper, L/K eine Körpererweiterung, $f, g \in K[X]$ nichtkonstante Polynome und $\alpha \in L$ eine gemeinsame Nullstelle von f und g. Wenn f irreduzibel über K ist, dann ist f ein Teiler von g in dem Ring $K[X]$.

(d) Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und $K \subset M \subset L$ ein Zwischenkörper. Wenn L/M und M/K Galoiserweiterungen sind, dann ist auch L/K eine Galoiserweiterung.

Abgabe: am Donnerstag, den 2.2. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).