WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

13. Übungsblatt

keine Abgabe

Aufgabe 1: Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n.

(a) Zeigen Sie: für jeden Teiler d von n existiert eine Untergruppe $H \subset G$ mit d Elementen. (Hinweis: benutzen Sie den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen, um das Problem auf zyklische Gruppen zurückzuführen.)

(b) Folgern Sie aus (a): wenn $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ die Zerlegung von n in Primfaktoren ist, dann gibt es eine Folge von Untergruppen

$$\{1\} = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_m = G$$

mit $|H_i| = p_1 \cdot \ldots \cdot p_i$.

(c) Nun sei $G = (\mathbb{Z}/17)^\times$, also gilt $n = 16 = 2^4$. In diesem Fall ist die Folge von Untergruppen H_i in (b) eindeutig, und jedes H_i ist zyklisch. Bestimmen Sie einen Erzeuger von H_i, für $i = 1, \ldots, 4$.

Aufgabe 2: Seien G_1, G_2 endliche Gruppen (nicht notwendigerweise abelsch) und $H \subset G_1 \times G_2$ eine Untergruppe. Wir bezeichnen für $i = 1, 2$ mit $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$ die Projektion auf den $i$ten Faktor. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:
Wenn $p_i(H) = G_i$ für $i = 1, 2$, dann gilt $H = G_1 \times G_2$.

Aufgabe 3: Sei $\zeta := \exp(2\pi i/12)$ und $L = \mathbb{Q}[\zeta]$ der Körper der 12ten Einheitswurzeln. Nach der Vorlesung gibt es einen Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{Z}/12)^\times \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}),$$

der ein $a \in (\mathbb{Z}/12)^\times$ auf einen Automorphismus σ_a mit $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$ abbildet.

(a) Zeigen Sie: $L = \mathbb{Q}[i, \sqrt{3}] \subset \mathbb{C}$.

(b) Was ist der Effekt von σ_a auf den Elementen i und $\sqrt{3}$, für $a = 5, 7, 11$?

(c) Bestimme die Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, die zu dem Teilkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \subset L$ gehört.

(d) Bestimme den Fixkörper $L^{\langle\sigma_7\rangle}$ der von σ_7 erzeugten Untergruppe.

(e) Zeigen Sie: $\alpha := i + \sqrt{3}$ ist ein primitives Element, d.h. $L = \mathbb{Q}[\alpha]$.

Aufgabe 4: Sei $q = p^n$ eine Primzahlpotenz, $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen.

(a) Zeigen Sie: Die Erweiterung $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ ist eine Galois-Erweiterung. Der Automorphismus $\alpha \mapsto \alpha^p$ ist ein Erzeuger der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$. Insbesondere gilt:

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/n.$$

(b) Bestimme alle Teilkörper $M \subset \mathbb{F}_q$ (in Abhängigkeit von n).

(c) Sei $q' = p^m$. Folgern Sie aus (b):

$$\mathbb{F}_{q'} \subset \mathbb{F}_q \quad \Leftrightarrow \quad m|n.$$

(d) Das Polynom $f = X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2$. Bezeichnet α eine Nullstelle von f, so ist dann der Körper $\mathbb{F}_2[\alpha]$ ein Körper mit 16 Elementen. Schreiben Sie alle Elemente des eindeutigen Teilkörpers mit 4 Elementen als Polynome in α.

Aufgabe 5: Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring mit Quotientenkörper K und $u, v, n \in R$ mit $n = uv \neq 0$. Zeigen Sie: Jedes Element aus K der Form $\frac{m}{n}$, mit $m \in R$, kann man schreiben als

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{u} + \frac{b}{v},$$

mit $a, b \in R$.

Gilt diese Aussage auch für alle faktoriellen Ringe?

Aufgabe 6: Sei $G \subset S_4$ die von den zwei Permutationen

$$\sigma = (1\,2\,3\,4), \quad \tau = (2\,4)$$

erzeugte Untergruppe. Zeigen Sie:

(a) Die kanonische Operation von G auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist transitiv.

(b) Die von σ erzeugte Untergruppe $N = \langle\sigma\rangle$ ist ein Normalteiler von G. Bestimmen Sie die Ordnungen $|N|$, $|G/N|$ und $|G|$.

(c) Es gibt einen Normalteiler $H \lhd G$ mit $\tau \in H$ und $|H| = 4$. Ist H eine zyklische Gruppe?

(d) Bestimmen Sie die Untergruppe $H \cap N \subset G$.

Was hat die Gruppe G mit dem regelmässigen Viereck (Quadrat) zu tun?

Aufgabe 7: Sei

$$f := X^4 - 2 = \prod_{j=1}^{4} (X - \alpha_j) \in \mathbb{Q}[X],$$

wobei $\alpha_1 = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ die einzige reelle Nullstelle von f ist und

$$\alpha_j = e^{2\pi i (j-1)/4} \cdot \alpha_1, \qquad j = 1, \ldots, 4.$$

Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f. Wir fassen die Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ als Untergruppe von S_4 auf, vermöge der Operation von G auf der Menge der Nullstellen α_j. Zeigen Sie:

(a) $L = \mathbb{Q}[i, \sqrt[4]{2}]$.

(b) Es gilt $[L : \mathbb{Q}] = 8$. (Hinweis: betrachte den Teilkörper $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] \subset L$.)

(c) Der Automorphismus $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ von $\mathbb{C}$ induziert ein Element $\tau \in G$. Aufgefasst als Permutation ist $\tau = (2\,4)$.

(d) Das Polynom f ist auch über dem Körper $\mathbb{Q}[i] \subset L$ irreduzibel. (Hinweis: benutze (b).)

(e) Die Galoisgruppe G enthält die Permutation $\sigma = (1\,2\,3\,4)$. Der Fixkörper der von σ erzeugten Untergruppe $N = \langle \sigma \rangle$ ist $L^N = \mathbb{Q}[i]$. (Hinweis: benutzen Sie (d)).

(f) Die Galoisgruppe G ist von den beiden Elementen σ, τ erzeugt (und damit identisch mit der in Aufgabe 6 studierten Gruppe).

(g) Bestimmen Sie den Fixkörper der Untergruppen H und $H \cap N$ (H ist definiert wie in Aufgabe 6).

Zur Teilnahme an der Scheinklausur müssen Sie auf den Übungblättern 1 bis 12 mindestens 60 Punkte erzielt haben. Sollten Sie dieses Ziel verfehlt und trotzdem mindestens 50 Punkte erreicht haben, können Sie evtl. durch Bearbeitung dieses Übungsblattes doch noch die Berechtigung zur Teilnahme erreichen. Geben Sie in diesem Fall ihre Lösungen am Donnerstag, den 9.2. bei Herrn Martin ab (*vor* der Übung!).