WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

2. Übungsblatt

Aufgabe 1: (3 P) Die folgenden vier Gruppen haben alle 12 Elemente:

- $G_1 := \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cdot 12$,
- $G_2 := \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cdot 6 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cdot 2$,
- $G_3 := D_6$ (siehe 1. Übungsblatt, Aufgabe 3).
- $G_4 := A_4$.

Zeigen Sie, dass alle diese Gruppen paarweise nicht isomorph sind. (Hinweis: welche dieser Gruppen sind kommutativ? Was sind die Ordnungen der Elemente von G_i?)

Aufgabe 2: (1+1+1+1=4 P) Sei $n \geq 3$. Der *Typ* einer Permutation $\sigma \in S_n$ sei definiert als die *sortierte* Liste $Z(\sigma)$ der Zykellängen von σ. Z.B. für $n = 5$ und $\sigma = (1\ 2)\,(3\ 4)$ ist $Z(\sigma) = [1, 2, 2]$. Zeigen Sie:

(a) Ist $Z(\sigma) = [a_1, \ldots, a_r]$ so ist die Ordnung von σ das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_1, \ldots, a_r$.

(b) Zwei Elemente $\sigma, \tau \in S_n$ sind genau dann konjugiert in S_n (d.h. $\sigma = \rho\,\tau\rho^{-1}$ für ein $\rho \in S_n$), wenn $Z(\sigma) = Z(\tau)$.

(c) Nun sei n ungerade. Dann gibt es genau zwei verschiedene Konjugiertenklassen in der alternierenden Gruppe A_n, deren Elemente vom Typ $Z(\sigma) = [n]$ sind.

(d) Sind die Elemente $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ und $\tau = (2\ 3\ 7\ 5\ 4\ 1\ 6)$ in A_7 konjugiert?

Aufgabe 3: (2+3=5 P)

(a) Bestimmen Sie alle Konjugiertenklassen in der Gruppe A_4, und für jede solche Klasse die Anzahl ihrer Elemente.

(b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 4 Seiten eines Tetraeders entweder grün, rot oder blau zu färben? Dabei betrachte man zwei Färbungen als äquivalent, wenn man die eine in die andere durch eine Drehsymmetrie des Tetraeders überführen kann.

Abgabe: am Donnerstag, den 10.11. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).