WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

3. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1+1=3 P) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist die Abbildung $G \times G/H \to G/H$, die einem Paar (g_1, g_2H) die Nebenklasse g_1g_2H zuordnet, eine transitive Operation von G auf der Menge G/H. Was ist der Stabilisator einer Nebenklasse $aH \in G/H$?

(b) Ist X eine Menge und $G \times X \to X$ eine transitive Operation von G auf X, so gibt es eine Untergruppe $H \subset G$ und eine Bijektion $\alpha : X \to G/H$ so, dass

$$g \cdot \alpha(x) = \alpha(g \cdot x),$$

für alle $x \in X$ und $g \in G$. (Die Operation von G auf G/H auf der linken Seite dieser Gleichheit sei dabei wie in (a) definiert.)

(c) Eine transitive Operation von G auf einer Menge X heiße *normal*, wenn für alle $x, y \in X$ die Stabilisatoren gleich sind, $G_x = G_y$. Zeigen Sie: eine Untergruppe $H \subset G$ ist genau dann ein Normalteiler, wenn die Operation von G auf G/H normal ist.

Aufgabe 2: (1/2+1/2+1+2+1=5 P) Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* von G ist definiert als die Teilmenge

$$Z_G := \{\, g \in G \mid gh = hg \ \ \forall\, h \in G \,\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Das Zentrum ist eine Untergruppe von G und ein Normalteiler.

(b) Die Abbildung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$, ist eine Operation von G auf sich selbst. Die Bahnen dieser Operation sind genau die Konjugiertenklassen von G.

(c) Ein Element $g \in G$ liegt im Zentrum von G genau dann, wenn die Konjugiertenklasse von g aus genau einem Element besteht.

(d) Angenommen, G ist endlich und hat p^n Elemente, wobei p eine Primzahl ist und $n \geq 1$. Dann ist das Zentrum von G nichttrivial, d.h. es hat mehr als nur ein Element. (Hinweis: benutzen Sie (a)-(c) und die Bahnengleichung.)

(e) Geben Sie eine nichttriviale Gruppe an, deren Zentrum trivial ist.

Aufgabe 3: (4 P) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: eine Gruppe G mit p^2 Elementen ist isomorph zu einer der beiden folgenden Gruppen:

- $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot p^2$,
- $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot p \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot p$.

(Hinweis: benutzen Sie Aufgabe 2 (d).)

Abgabe: am Donnerstag, den 17.11. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).