WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

4. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+2+1=4 P)

(a) Sei G eine Gruppe und $H \lhd G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie: N ist (als Menge) disjunkte Vereinigung von Konjugiertenklassen von G.

(b) Bestimmen Sie alle Konjugiertenklassen von A_5 (die Angabe eines Vertreters für jede Klasse reicht) und die Anzahl der Elemente jeder Klasse.

(c) Zeigen Sie: A_5 ist eine einfache Gruppe, d.h. $H = \{e\}$ und $H = A_5$ sind die einzigen Normalteiler. (Hinweis: benutzen Sie (a) und (b).)

Aufgabe 2: (1+1+2=4 P)

(a) Finden Sie ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $5a + 7b = 1$.

(b) Sei $G = \mathbb{Z} \cdot 1/5 + \mathbb{Z} \cdot 1/7$ die von den Brüchen $1/7$ und $1/5$ erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$. Zeigen Sie, dass G eine zyklische Gruppe ist, und finden Sie einen Erzeuger.

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ nicht endlich erzeugt sind.

Aufgabe 3: (1+2+1=4 P)

(a) Sei $G := \mathbb{Z}$ und $H \subset G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie: H is ein direkter Faktor (d.h. es existiert eine Untergruppe $H' \subset \mathbb{Z}$ mit $G = H \oplus H'$) genau dann, wenn $H = \{0\}$ oder $H = \mathbb{Z}$. Hinweis: benutzen Sie die Klassifikation aller Untergruppen von $\mathbb{Z}$ (Satz 1.7.3 bei Lütkebohmert).

(b) Sei $x := (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ und $G := \mathbb{Z} \cdot x \subset \mathbb{Z}^2$ die von x erzeugte zyklische Untergruppe. Zeigen Sie: H ist genau dann ein direkter Faktor, wenn a und b teilerfremd sind. Hinweis: sind a und b teilerfremd, so gibt es $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ac + bd = 1$.

(c) Für $a := 17$ und $b := 13$: finde ein Komplement $H' \subset \mathbb{Z}^2$ zu $H = \mathbb{Z} \cdot x \subset \mathbb{Z}^2$.

Abgabe: am Donnerstag, den 24.11. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).