WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

5. Übungsblatt

Aufgabe 1: (2+1+1=4 P) Die abelsche Gruppe G sei gegeben durch drei Erzeuger x, y, z und die Relationen

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 0, \\ 2x - 3y + z &= 0, \\ 8x - 7y + 9z &= 0. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Elementarteiler $d_1, \ldots, d_m$ und den Rang von G.

(b) Bestimmen Sie ein Element von G mit der Ordnung 5 (als Linearkombination von x, y, z).

(c) Wieviele Elemente der Ordnung 5 gibt es in G?

Aufgabe 2: (1+1=2 P) Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung 100. Zeigen Sie:

(a) G enthält ein Element der Ordnung 10.

(b) Wenn G kein Element der Ordnung > 10 enthält, dann gilt

$$G \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 10 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 10.$$

Aufgabe 3: (1+1+1=3 P)

(a) Zeigen Sie: jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch.

(b) Zeigen Sie: jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ ist frei.

(c) Bestimmen Sie eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ vom Rang 5 (durch Angabe einer Basis).

Aufgabe 4: (3 P) Sei $G = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 70)^\times$. Bestimmen Sie die Elementarteiler von G, und finden Sie ein Element der Ordnung 12. (Hinweis: benutzen Sie den Chinesischen Restsatz.)

Abgabe: am Donnerstag, den 1.12. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).