WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

7. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1/2+1/2+1+1=4 P) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie:

(a) Für alle $a, b, c \in R$ gilt:

(i) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$,

(ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -a \cdot b$,

(iii) $a \cdot 0 = 0$.

(b) Der Polynomring $R[X]$ ist nullteilerfrei genau dann, wenn R nullteilerfrei ist.

(c) Sei R ein Integritätsbereich. Dann gilt

$$(R[X])^\times = R^\times,$$

d.h. die Einheiten von $R[X]$ sind genau die konstanten Polynome, welche als Elemente von R Einheiten sind.

(d) Mit $I_1, I_2 \lhd R$ sind auch die Teilmengen

$$I_1 \cap I_2, \quad I_1 + I_2 := \{\, a + b \mid a \in I_1,\, b \in I_2 \,\}$$

und

$$I_1 \cdot I_2 := \{\, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I_1,\, b_i \in I_2 \,\}$$

Ideale von R.

(e) Sei $I \lhd R$ ein Ideal. Wenn R/I nullteilerfrei ist, dann ist I ein Primideal. Und wenn R/I ein Körper ist, so ist I ein maximales Ideal.

Aufgabe 2: (1+1+1+1=4 P) Es sei $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{R}$ der Einsetzungshomomorphismus mit $\varphi(X) = \sqrt{3}$ und

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{\, x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z} \,\}$$

das Bild von φ. Sei $I := \mathrm{Kern}(\varphi) \lhd \mathbb{Z}[X]$ der Kern von φ.

(a) Zeigen Sie, dass I das von dem Polynom $X^2 - 3$ erzeugte Hauptideal ist,

$$I = (X^2 - 3).$$

(Hinweis: benutzen Sie Polynomdivision mit Rest.)

(b) Zeigen Sie, dass I ein Primideal, aber kein maximales Ideal ist.

(c) Sei $J := I + (11) \lhd \mathbb{Z}[X]$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[X]/J \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{11} := \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 11.$$

Schliessen Sie, dass J ein maximales Ideal ist. (Hinweis: finden Sie ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 \equiv 3 \pmod{11}$.)

(d) Finden Sie ein Ideal $N \lhd \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ für das $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/N \cong \mathbb{F}_{11}$. Ist N Prim- bzw. maximales Ideal?

Aufgabe 3: (1+1+2=4 P) Sei $R := \mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ der Ring der ganzen Gauß'schen Zahlen. Sei $Q(R)$ der Quotientenkörper von R.

(a) Nach Satz 1.4 der Vorlesung setzt sich die natürliche Inklusion $R \hookrightarrow \mathbb{C}$ zu einer Inklusion $Q(R) \hookrightarrow \mathbb{C}$ fort. Zeigen Sie: das Bild von $Q(R)$ in $\mathbb{C}$ ist

$$\mathbb{Q}[i] = \{\, x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{Q} \,\}.$$

(Insbesondere ist $\mathbb{Q}[i]$ ein Körper, den man mit dem Quotientenkörper $Q(R)$ identifizieren kann.)

(b) Finden Sie eine ganze Zahl a mit $a^2 \equiv -1 \pmod{41}$ und schreiben Sie das Ideal

$$I := (41, a - i) \lhd \mathbb{Z}[i]$$

als Hauptideal. Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = 41$. Ist (41) ein Primideal? Ist I ein maximales Ideal?

(c) Zeigen Sie, dass das Ideal $(3) \lhd \mathbb{Z}[i]$ ein maximales Ideal (und damit auch ein Primideal) ist. (Hinweis: der euklidische Algorithmus zeigt, dass ein Ideal $J \lhd \mathbb{Z}[i]$ mit $(3) \subset J$, $(3) \neq J$, ein Element $a = x + y \cdot i$ enthält mit $|a| = 1$.)

Abgabe: am Donnerstag, den 15.12. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).