WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

8. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1+1/2+1/2+1=4 P) Sei R ein faktorieller Ring. Wir bezeichnen mit $P \subset R$ ein Vertretersystem der Assoziiertenklassen aller Primelemente (d.h. für jedes Primelement $p \in R$ existiert ein eindeutiges Element $p' \in P$ mit $p \sim p'$). Für Elemente $a, b \in R - \{0\}$ setzen wir

$$\mathrm{ggT}(a,b) := \prod_{p \in P} p^{\min\{\mathrm{ord}_p(a), \mathrm{ord}_p(b)\}},$$
$$\mathrm{kgV}(a,b) := \prod_{p \in P} p^{\max\{\mathrm{ord}_p(a), \mathrm{ord}_p(b)\}}.$$

Seien $a, b, c \in R - \{0\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Assoziiertenklassen von $\mathrm{ggT}(a,b)$ und $\mathrm{kgV}(a,b)$ hängen nicht von der Wahl des Vertretersystems P ab.

(b) $a|b \iff \mathrm{ord}_p(a) \leq \mathrm{ord}_p(b) \ \forall\, p \in P$,

(c) $c|a$ und $c|b \iff c|\mathrm{ggT}(a,b)$,

(d) $a|c$ und $b|c \iff \mathrm{kgV}(a,b)|c$.

(e) Bestimmen Sie den ggT der Polynome

$$f = 10X - 15,\ g = 15X - 6$$

in dem Ring $\mathbb{Z}[X]$ (bis auf Assoziiertheit).

Aufgabe 2: (1/2+1/2+1+1+1=4 P) Welches der folgenden Polynome ist irreduzibel in dem Ring $\mathbb{Q}[X,Y]$, und welches ist irreduzible in $\mathbb{C}[X,Y]$?

(a) $X^5 - 3$,

(b) $Y^4 - 4$,

(c) $X^2 + XY + Y^2$,

(d) $X^2 + Y^2 - 1$,

(e) $X^4 - 2X^2Y^2 + 1$.

Aufgabe 3: (1/2+1/2+1+1+1=4 P) Sei R ein Ring und $I \lhd R$ ein Ideal, $I \neq R$. Wir bezeichnen mit $R[X] \cdot I$ das von den Elementen aus I erzeugte Ideal des Polynomringes $R[X]$.

(a) Zeigen Sie: ein Polynom $f = \sum a_i X^i$ liegt genau dann in $R[X] \cdot I$, wenn alle Koeffizienten a_i in I liegen.

(b) Konstruieren Sie einen Ringhomomorphismus

$$R[X]/R[X] \cdot I \longrightarrow (R/I)[X],$$

und zeigen Sie, dass dieser Homomorphismus ein Isomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie: I ist genau dann ein Primideal von R, wenn $R[X] \cdot I$ ein Primideal von $R[X]$ ist. (Hinweis: benutzen Sie die Aussage von Aufgabe 1(b) vom 7. Übungsblatt.)

(d) Nun sei R ein faktorieller Ring und $f, g \in R[X]$. Folgern Sie aus (b): wenn f und g primitiv sind, dann ist auch fg primitiv. (Bem.: diese Aussage ist Teil des Lemmas von Gauß.)

(e) Zeigen Sie: $R[X] \cdot I$ ist niemals ein maximales Ideal.

Abgabe: am Donnerstag, den 22.12. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).