WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers

Algebra I

9. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1/2+1/2+1+1= 4 P) Sei $R = \mathbb{Z}[i]$ der Ring der ganzen Gauß'schen Zahlen. Zeigen Sie (unter Verwendung von Satz II.2.4 der Vorlesung):

(a) Ist $a = x + yi$ ein Primelement von R, so gibt es eine Primzahl p mit $p|x^2 + y^2 = |a|^2$ und $a|p$.

(b) Eine Primzahl p ist genau dann Summe von zwei Quadraten, d.h. von der Form $p = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, wenn $p \not\equiv 3 \pmod 4$. (Für $p \neq 2$ ist das genau die Aussage von Satz II.2.4.) In diesem Fall ist

$$p = (x + y\,i)(x - y\,i)$$

die Zerlegung von p in Primfaktoren in dem Ring R.

(c) Eine Primzahl p ist genau dann ein Primelement in R, wenn $p \equiv 3 \pmod 4$ gilt.

(d) Jedes Primelement von R ist assoziiert zu einem der Primelement in (a) oder (b). Genauer: die Menge

$$P := \{\, p \mid p \equiv 3 \pmod 4 \,\} \cup \{\, 1 + i \,\} \\ \cup \{\, x + yi, x - yi \mid x > |y| > 0,\ x^2 + y^2 \text{ ist Primzahl} \,\}$$

ist ein Vertretersystem aller Primelemente von R.

(e) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $a = 1258$ und von $b = 5 + 7i$ in R.

Aufgabe 2: (1,5+1+1,5 = 4 P)

(a) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome über $\mathbb{F}_3$ vom Grad ≤ 3.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f := X^4 - X^2 + 2X + 3$$

irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist. (Hinweis: zeigen Sie, dass f keine rationale Nullstelle, aber eine Nullstelle in $\mathbb{F}_3$ hat. Betrachten sie nun die Zerlegung von f modulo 3.)

(c) Sei

$$g := X^3 - X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$$

und $K := \mathbb{F}_3[X]/(g)$ der zugeordnete Restklassenring. Zeigen Sie, dass K ein Körper ist. Zeigen Sie ausserdem, dass das Polynom

$$h := Y^3 - Y + 1 \in K[Y]$$

in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 3: (1+1+1+1=4 P) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel (in dem angegebenen Ring)?

(a) $X^4 + 6X + 10$ (in $\mathbb{Q}[X]$),

(b) $X^3 + 1$ (in $\mathbb{F}_5[X]$),

(c) $X^3 + X + 1$ (in $\mathbb{F}_2[X]$),

(d) $X^3 - XY - Y$ (in $\mathbb{C}[X, Y]$).

Abgabe: am Donnerstag, den 12.1. (in der Vorlesung, oder bei Herrn Martin).