WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers
Andreas Martin

Algebra I

0. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1+1=3 P) Sei $t \in \mathbb{R}$ eine relle Zahl und A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Diagonalisieren Sie A, d.h. bestimmen Sie eine invertierbare Matrix B so dass BAB^{-1} eine Diagonal-Matrix ist. Kann man B mit rellen Einträgen wählen?

(c) Berechnen Sie A^n für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$. Für welche Werte von t gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so dass A^n die Identitätsmatrix ist?

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} X - \cos t & \sin t \\ -\sin t & X - \cos t \end{pmatrix} \\ &= (X - \cos t)^2 + (\sin t)^2 = X^2 - 2X\cos t + 1 . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A, d.h. die Nullstellen von $\chi_A(X)$ ergeben sich zu

$$\frac{2\cos t \pm \sqrt{(2\cos t)^2 - 4}}{2} = \cos t \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - (\cos t)^2} = \cos t \pm \mathrm{i}\sin t = e^{\pm \mathrm{i}t} .$$

(b) Die Eigenvektoren zum Eigenwert $e^{\pm \mathrm{i}t}$ sind die Vektoren im Kern der Matrix

$$\begin{aligned} e^{\pm \mathrm{i}t}\mathrm{I}_2 - A &= \begin{pmatrix} e^{\pm \mathrm{i}t} - \cos t & \sin t \\ -\sin t & e^{\pm \mathrm{i}t} - \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \mathrm{i}\sin t & \sin t \\ -\sin t & \pm \mathrm{i}\sin t \end{pmatrix} \\ &= \sin t \begin{pmatrix} \pm \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \pm \mathrm{i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \sin t \begin{pmatrix} 1 & \mp \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Also ist $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $e^{\mathrm{i}t}$, und $\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $e^{-\mathrm{i}t}$. Mit

$$B := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

ergibt sich daher

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix} .$$

Ist $t \notin \pi\mathbb{Z}$, so läßt sich B nicht mit reellen Einträgen wählen, da das charakteristische Polynom von A nicht über $\mathbb{R}$ zerfällt.

(c) Es folgt

$$\begin{aligned}
A^n &= B^{-1}\left(BAB^{-1}\right)^n B \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix}^n \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}nt} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}nt} \end{pmatrix}^n \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}nt} & e^{\mathrm{i}nt} \\ \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}nt} & e^{-\mathrm{i}nt} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}nt} + e^{-\mathrm{i}nt} & -\frac{e^{\mathrm{i}nt} - e^{-\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}} \\ \frac{e^{\mathrm{i}nt} - e^{-\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}} & e^{\mathrm{i}nt} + e^{-\mathrm{i}nt} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) \\ \sin(nt) & \cos(nt) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Formel für A^n hätte man auch direkt per Induktion beweisen können.

Es folgt also, daß $A^n = \mathrm{I}_2$ genau dann, wenn $nt \in 2\pi\mathbb{Z}$, d.h. wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt so, daß $nt = 2\pi k$.

Ein solches $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, gibt es daher genau dann, wenn $\frac{t}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ ist, d.h. wenn t rationales Vielfaches von π ist.

Aufgabe 2: (1/2+1/2+1+1=3 P) Sei wieder $t \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Für welche Werte von t ist A diagonalisierbar?

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$ der 2-dimensionale reelle Standard-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ die von der Matrix A induzierte lineare Abbildung. Finden Sie einen eindimensionalen Unterraum $W \subset V$, unabhängig von t, sodass $\varphi(W) \subset W$. Bestimmen Sie die von φ induzierte lineare Abbildung

$$V/W \to V/W, \quad v + W \mapsto \varphi(v) + W.$$

(Bem.: da V/W eindimensional ist, ist diese Abbildung durch ein Skalar gegeben.)

(d) Für welche Werte von t gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so dass A^n die Identitätsmatrix ist?

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} X-1 & 1 \\ 0 & X-t \end{pmatrix} \\
&= (X-1)(X-t) .
\end{aligned}$$

Also sind 1 und t die Eigenwerte von A.

(b) Im Falle $t \neq 1$ ist A diagonalisierbar, da A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt.

Im Falle $t = 1$ ist A jedoch nicht diagonalisierbar, da der Eigenraum zum Eigenwert 1 die Dimension 1 hat, und folglich die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 kleiner ist als seine algebraische Vielfachheit.

(c) Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist gegeben durch

$$W := \mathrm{Eig}_A(1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

Also gilt $\varphi(W) = W$. Folglich ist die von φ induzierte Abbildung

$$\overline{\varphi} : V/W \to V/W,\ v + W \mapsto \varphi(v) + W$$

wohldefiniert und linear. Es gilt $\dim(V/W) = 1$, und $b := \binom{0}{1} + W$ bildet eine Basis von V/W. Nun gilt

$$\overline{\varphi}(b) \ = \ \varphi(b) + W \ = \ \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} + W \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + W \ = \ tb\ .$$

Es folgt

$$\overline{\varphi}(\overline{v}) \ = \ t\overline{v},\ \forall \overline{v} \in V/W\ .$$

(d) Im Falle $t \neq 1$ hat A die Eigenwerte 1 und t, und A ist diagonalisierbar. Also gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ derart, daß

$$S^{-1}AS \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\ .$$

Es folgt

$$A^n \ = \ S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^n \end{pmatrix} S^{-1} \ = \ \mathrm{I}_2 \iff t^n = 1\ .$$

Das ist im Falle $t \neq 1$ genau dann erfüllt, wenn $t = -1$ und $n \in 2\mathbb{Z}$. Im Falle $t = 1$ zeigt man durch Induktion, daß

$$A^n \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Also gibt es genau dann ein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $A^n = \mathrm{I}_2$, wenn $t = -1$ ist.

Aufgabe 3: (2+2+2=6 P) Es seien $e_1, \ldots, e_8 \in \mathbb{R}^3$ die acht Ecken eines Würfels im euklidischen Raum:

$$\begin{aligned} e_1 &= (-1,-1,-1) & e_5 &= (-1,1,-1) \\ e_2 &= (1,-1,-1) & e_6 &= (1,1,-1) \\ e_3 &= (-1,-1,1) & e_7 &= (-1,1,1) \\ e_4 &= (1,-1,1) & e_8 &= (1,1,1) \end{aligned}$$

Sei $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Rotation um die y-Achse, die den Würfel in sich überführt und auf den Ecken $e_1, \ldots, e_8$ die Permutation

$$\sigma_1 = (1\ 2\ 4\ 3)\,(5\ 6\ 8\ 7)$$

induziert. Weiterhin sei $L \subset \mathbb{R}^3$ die Diagonalachse des Würfels, die die Ecken e_1, e_8 enthält und $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Rotation um L, die die folgende Permutation induziert:

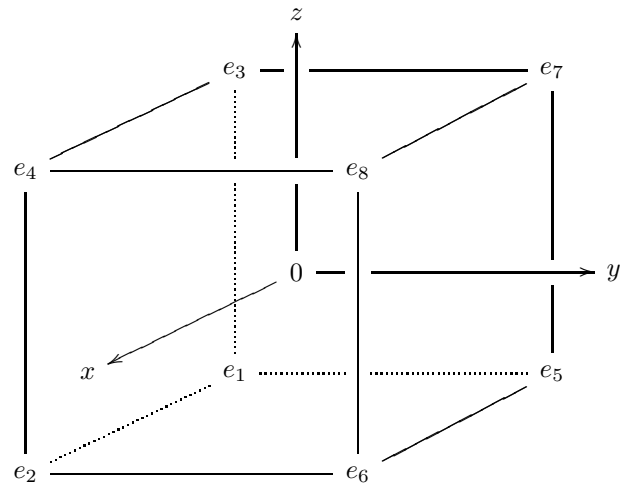
$$\sigma_2 = (2\ 3\ 5)\,(4\ 7\ 6).$$

(a) Stellen Sie φ_1, φ_2 durch Matrizen A_1, A_2 dar.

(b) Berechnen Sie $\varphi_1 \circ \varphi_2$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1$ und die dazugehörenden Permutationen.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_1, A_2, A_1A_2 und A_2A_1 (Hinweis: verwende ein geometrisches Argument, keine Rechnung).

Lösung:



(a) Gesucht sind Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, daß

$$\varphi_i(v) = A_i \cdot v,\ \forall v \in \mathbb{R}^3$$

gilt für $i = 1, 2$. Die Abbildung φ_1 beschreibt in der xz-Ebene eine Drehung um $\pi/2$, was durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ausgedrückt werden kann. Die y-Achse bleibt fixiert. Also ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Abbildung φ_2 permutiert die Koordinatenachsen, und zwar geht die x-Achse auf die z-Achse, die z-Achse auf die y-Achse, und die y-Achse auf die x-Achse. Daher gilt

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Die Matrizendarstellungen von $\varphi_1 \circ \varphi_2$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1$ sind gegeben durch

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Die zugehörigen Eckenpermutationen sind gegeben durch

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)(7\ 8)$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = (1\ 3)(2\ 7)(4\ 5)(6\ 8) .$$

Geometrisch ist $\varphi_1 \circ \varphi_2$ eine Drehung um den Winkel π um die Achse durch die Punkte $(0, 1, 1)^{\mathrm{t}}$ und $(0, -1, -1)^{\mathrm{t}}$, d.h. um die Achse durch die Seitenmittelpunkte von $\overline{e_7 e_8}$ und $\overline{e_1 e_2}$. Die Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1$ ist eine Drehung um den Winkel π um die Achse durch die Punkte $(-1, -1, 0)^{\mathrm{t}}$ und $(1, 1, 0)^{\mathrm{t}}$, d.h. um die Achse durch die Seitenmittelpunkte von $\overline{e_1 e_3}$ und $\overline{e_6 e_8}$.

(c) Die Matrix A_1 beschreibt eine Drehung um die y-Achse. Also ist 1 ihr einziger reeller Eigenwert. Das sie in der xz-Ebene eine Drehung um $\pi/2$ beschreibt, hat sich noch die komplexen Eigenwere $\pm$i.

Die Matrix A_2 beschreibt eine Drehung um die Achse $\overline{e_1 e_8}$ um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$. Also ist 1 ihr einziger reeller Eigenwert, und sie aht noch die komplexen Eigenwerte $\exp(\pm \mathrm{i} 2\pi/3)$.

Die Matrizen $A_1 A_2$ und $A_2 A_1$ beschreiben jeweils Drehungen um den Winkel π, also haben sie jeweils die Eigenwerte 1 (einfach) und -1 (zweifach).