WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers
Andreas Martin

Algebra I

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1+1=3 P) Seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Das Bild $\varphi(G)$ von φ ist eine Untergruppe von H.

(b) Der Kern $\varphi^{-1}(e)$ von φ ist eine Untergruppe von G.

(c) Der Homomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn der Kern nur aus dem neutralen Element besteht.

Lösung: Vorbemerkung: Es gilt stets $\varphi(e) = e$ und $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ für alle $a \in G$.

(a) Wegen $\varphi(e) = e$ ist $\varphi(G) \neq \emptyset$. Es seien nun $h_1, h_2 \in \varphi(G)$. Zu zeigen ist, daß $h_1 h_2^{-1} \in \varphi(G)$. Nun gibt es $g_1, g_2 \in G$ derart, daß $\varphi(g_1) = h_1$ und $\varphi(g_2) = h_2$. Daraus folgt

$$h_1 h_2^{-1} \;=\; \varphi(g_1)(\varphi(g_2))^{-1} \;=\; \varphi(g_1)\varphi(g_2^{-1}) \;=\; \varphi(g_1 g_2^{-1}) \;\in\; \varphi(G) \; .$$

(b) Wegen $\varphi(e) = e$ ist $e \in \varphi^{-1}(e)$. Es seien nun $g_1, g_2 \in \varphi^{-1}(e)$. Zu zeigen ist, daß $g_1 g_2^{-1} \in \varphi^{-1}(e)$. Nun gilt

$$\varphi(g_1 g_2^{-1}) \;=\; \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} \;=\; ee^{-1} \;=\; e \; ,$$

daher ist $g_1 g_2^{-1} \in \varphi^{-1}(e)$.

(c) Zunächst sei φ als injektiv vorausgesetzt. Dann folgt aus $a \in \varphi^{-1}(e)$ sofort

$$\varphi(a) \;=\; e \;=\; \varphi(e) \; ,$$

und wegen der Injektivität ist $a = e$. Somit gilt $\varphi^{-1}(e) = \{e\}$.

Nun sei $\varphi^{-1}(e) = \{e\}$ vorausgesetzt. Es seien $g_1, g_2 \in G$ derart, daß $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Dann folgt

$$\varphi(g_1 g_2^{-1}) \;=\; \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} \;=\; e \; ,$$

und somit $g_1 g_2^{-1} \in \varphi^{-1}(e)$. Nach Vorausseztung folgt daraus $g_1 g_2^{-1} = e$, und schließlich $g_1 = g_2$.

Aufgabe 2: (1+1+2=4 P) Seien G_1 und G_2 Gruppen. Zeigen Sie:

(a) Das kartesische Produkt $G_1 \times G_2$ ist mit der Verknüpfung

$$(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) \mapsto (a_1 \circ a_2, b_1 \circ b_2)$$

eine Gruppe.

(b) Ist H eine kommutative Gruppe und sind $\varphi_1 : G_1 \to H$ und $\varphi_2 : G_2 \to H$ Gruppenhomomorphismen, so ist die Abbildung

$$G_1 \times G_2 \to H, \qquad (a_1, a_2) \mapsto \varphi_1(a_1) \circ \varphi_2(a_2)$$

wieder ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Die Aussage (b) wird falsch, wenn man die Voraussetzung, dass H kommutativ ist, fallenlässt (Gegenbeispiel!).

Lösung:

(a) Offenbar ist diese Abbildung in der Tat eine Verküpfung auf $G_1 \times G_2$. Es seien nun $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2) \in G_1 \times G_2$, und es sei $e := (e_1, e_2)$, wobei e_1 bzw. e_2 das neutrale Element von G_1 bzw. G_2 sei. Ferner sei $a' := (a_1^{-1}, a_2^{-1})$. Es folgt

$$\begin{array}{rcl cl}
(a \circ b) \circ c & = & ((a_1, a_2) \circ (b_1, b_2)) \circ (c_1, c_2) & = & (a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2) \circ (c_1, c_2) \\
& = & ((a_1 \circ b_1) \circ c_1, (a_2 \circ b_2) \circ c_2) & = & (a_1 \circ (b_1 \circ c_1), a_2 \circ (b_2 \circ c_2)) \\
& = & (a_1, a_2) \circ (b_1 \circ c_1, b_2 \circ c_2) & = & a \circ (b \circ c) \, , \\
e \circ a & = & (e_1, e_2) \circ (a_1, a_2) & = & (e_1 \circ a_1, e_2, \circ a_2) \\
& = & (a_1, a_2) & = & a \, , \\
a' \circ a & = & (a_1^{-1}, a_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) & = & (a_1^{-1} \circ a_1, a_2^{-1} \circ a_2) \\
& = & (e_1, e_2) & = & e \, .
\end{array}$$

Daher ist $G_1 \times G_2$ eine Gruppe.

(b) Es sei $\tau : G_1 \times G_2 \to H$ die fragliche Abbildung. Es seien $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$. Dann folgt

$$\begin{array}{rcl}
\tau(a \circ b) & = & \tau((a_1, a_2) \circ (b_1, b_2)) \\
& = & \tau(a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2) \\
& = & \varphi_1(a_1 \circ b_1) \circ \varphi_2(a_2 \circ b_2) \\
& = & (\varphi_1(a_1) \circ \varphi_1(b_1)) \circ (\varphi_2(a_2) \circ \varphi_2(b_2)) \\
& = & (\varphi_1(a_1) \circ \varphi_2(a_2)) \circ (\varphi_1(b_1) \circ \varphi_2(b_2)) \\
& = & \tau(a_1, a_2) \circ \tau(b_1, b_2) \\
& = & \tau(a) \circ \tau(b) \, .
\end{array}$$

Daher ist τ ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Es sei $G_1 = G_2 = H = S_3$, und $\varphi_1 : G_1 \to H$ und $\varphi_2 : G_2 \to H$ seien jeweils die identische Abbildung auf S_3. Bekanntlich gibt es Elemente $s, t \in S_3$ mit $s \circ t \neq t \circ s$. Dann folgt mit $a := b := (s, t)$

$$\tau(a \circ b) \;=\; \tau((s,t) \circ (s,t)) \;=\; \tau(s \circ s, t \circ t) \;=\; \varphi_1(s \circ s) \circ \varphi_2(t \circ t) \;=\; s \circ s \circ t \circ t \, ,$$

aber andererseits

$$\tau(a) \circ \tau(b) \;=\; \tau(s,t) \circ \tau(s,t) \;=\; (\varphi_1(s) \circ \varphi_2(t)) \circ (\varphi_1(s) \circ \varphi_2(t)) \;=\; s \circ t \circ s \circ t \, .$$

Aus $s \circ t \neq t \circ s$ folgt nun $\tau(a \circ b) \neq \tau(a) \circ \tau(b)$. Daher ist in diesem Fall τ kein Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 3: (1+1+1+2=5 P) Sei $n \geq 3$. Wir definieren die Permutationen

$$r := (\, 1 \; 2 \; \cdots \; n \,)$$

und

$$s := \begin{cases} (\,1\;n\,)\,(\,2\;\;n{-}1\,)\cdots(\,m\;\;m{+}1\,), & \text{für } n = 2m, \\ (\,1\;\;n{-}1\,)\,(\,2\;\;n{-}2\,)\cdots(\,m\;\;m{+}1\,), & \text{für } n = 2m+1. \end{cases}$$

als Elemente der Gruppe S_n. Die *Diedergruppe* der Ordnung $2n$ ist definiert als die von r und s erzeugte Untergruppe von S_n und wird mit D_n bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Es gelten die Relationen

$$r^n = s^2 = \mathrm{Id}, \qquad srs^{-1} = r^{-1}.$$

(b) Die von r erzeugte zyklische Untergruppe $Z \subset D_n$ ist ein Normalteiler der Ordnung $|Z| = n$ und vom Index $[D_n : Z] = 2$. Insbesondere hat D_n genau $2n$ Elemente.

(c) Die von s erzeugte Untergruppe $H \subset D_n$ ist *kein* Normalteiler. Die Abbildung

$$Z \to D_n/H, \qquad r^k \mapsto r^k H$$

ist eine Bijektion. Insbesonder hat jedes Element von D_n eine eindeutige Darstellung der Form $r^k s^j$ mit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $j \in \{0, 1\}$.

(d) Nun sei n eine gerade Zahl. Bestimmen Sie die Menge aller Konjugiertenklassen von D_n.

Lösung:

(a) Die Relationen $r^n = s^2 = \mathrm{Id}$ sind klar nach Definition. Für die noch zu zeigende Relation unterscheiden wir die Fälle n gerade und n ungerade.

- Ist $n = 2m$ gerade, so gilt $s(i) = s^{-1}(i) = n+1-i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es folgt dann für $i \in \{2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} (srs^{-1})(i) &= s(r(n+1-i)) &&= s(n+2-i) \\ &= n+1-(n+2-i) &&= i-1 \\ &= r^{-1}(i)\,, \end{aligned}$$

  und es gilt

$$(srs^{-1})(1) \;=\; s(r(n)) \;=\; s(1) \;=\; n \;=\; r^{-1}(1)\,.$$

  Also gilt $srs^{-1} = r^{-1}$.

- Ist $n = 2m+1$ ungerade, so gilt $s(i) = s^{-1}(i) = n - i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $s(n) = n$. Es folgt dann für $i \in \{2, \ldots, n-1\}$

$$\begin{aligned} (srs^{-1})(i) &= s(r(n-i)) &&= s(n+1-i) \\ &= n-(n+1-i) &&= i-1 \\ &= r^{-1}(i)\,, \end{aligned}$$

  und es gilt

$$(srs^{-1})(1) \;=\; s(r(n-1)) \;=\; s(n) \;=\; n \;=\; r^{-1}(1)$$

  sowie

$$(srs^{-1})(n) \;=\; s(r(n)) \;=\; s(1) \;=\; n-1 \;=\; r^{-1}(n)\,.$$

  Also gilt $srs^{-1} = r^{-1}$.

(b) Es gilt $\operatorname{ord} r = n$ und somit

$$Z \;=\; \{r^0, r^1, \ldots, r^{n-1}\}\ ;$$

es folgt $|Z| = n$.

Wir beachten, daß sich jedes Element von D_n als Produkt von ganzzahligen Potenzen von r und s schreiben läßt. Um die Normalteilereigenschaft von Z zu testen, genügt es wegen $s^2 = e$ zu testen, ob $szs \in Z$ gilt für alle $z \in Z$. Dies folgt aber wegen $sr = r^{-1}s$ aus

$$sr^k s \;=\; r^{-k}ss \;=\; r^{-k}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Schließlich wollen wir noch $[D_n : Z] = 2$ zeigen. Dazu wollen wir zeigen, daß $D_n/Z = \{Z, sZ\}$ gilt und $Z \neq sZ$.

Zunächst ist $s \notin Z$, also gilt $Z \neq sZ$. Um nun zu zeigen, daß jedes Element von D_n in Z oder sZ liegt, genügt es zu zeigen, daß aus $g \in Z \cup sZ$ auch $r^k g \in Z \cup sZ$ und $sg \in Z \cup sZ$, da jedes Element von D_n ein endliches Produkt von Potenzen von r und Faktoren s ist. Im Falle $g \in Z$ folgt aber sofort $r^k g \in Z$ und $sg \in sZ$. Im Falle $g \in sZ$ folgt $r^k g \in r^k sZ = sr^{-k}Z = sZ$ und $sg \in ssZ = Z$. Damit ist $D_n = Z \cup sZ$ und $D_n/Z = \{Z, sZ\}$. Insbesondere ist $[D_n : Z] = 2$, und nach Vorlesung folgt

$$|D_n| \;=\; [D_n : Z] \cdot |Z| \;=\; 2n\ .$$

(c) H ist kein Normalteiler, denn es gilt $s \in H$, aber

$$rsr^{-1} \;=\; rssrs^{-1} \;=\; r^2 s \notin H\ .$$

Wir wollen nun die Abbildung

$$\varphi : Z \to D_n/H,\ z \mapsto zH$$

untersuchen. Sind $r^k, r^l \in Z$ mit $\varphi(r^k) = \varphi(r^l)$, so folgt $r^k H = r^l H$, d.h. $r^{k-l} \in H$. Nun gilt $H \cap Z = \{e\}$. Also folgt $r^{k-l} = e$, d.h. $r^k = r^l$. Mithin ist die Abbildung φ injektiv.

Ferner gilt $|Z| = n$ und $|D_n/H| = |D_n|/|H| = n$. Daher ist die Abbildung φ auch surjektiv.

Dies bedeutet, daß es für jedes $g \in D_n$ genau ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ gibt derart, daß

$$r^k H \;=\; \varphi(r^k) \;=\; gH\ .$$

Also gibt es zu jedem $g \in D_n$ genau ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und genau ein $j \in \{0, 1\}$ derart, daß $r^k = gs^j$, d.h. $r^k s^j = g$.

(d) Es sei also $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir beachten die Relation

$$sr^{-k} \;=\; r^k s,\ \forall k \in \mathbb{Z}\ .$$

Daher gilt für alle $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
(r^l)(r^k s)(r^l)^{-1} \;&=\; r^{k+l} s r^{-l} \;=\; r^{2l+k} s\ ,\\
(r^l s)(r^k s)(r^l s)^{-1} \;&=\; r^l s r^k s s r^{-l} \;=\; r^l s r^{k-l} \;=\; r^l r^{l-k} s \;=\; r^{2l-k} s\ .
\end{aligned}$$

Man beachte, daß die Reste von $2l + k$ und $2l - k$ modulo n stets dieselbe Parität haben wie k, da n gerade ist. Also sind die beiden Mengen

$$\{s, r^2 s, \ldots, r^{n-2} s\},\ \{rs, r^3 s, \ldots, r^{n-1} s\}$$

Konjugiertenklassen von D_n. Ferner ist

$$\begin{aligned} (r^l) r^k (r^l)^{-1} &= r^l r^k r^{-l} = r^k , \\ (r^l s) r^k (r^l s)^{-1} &= r^l s r^k s r^{-l} = r^l r^{-k} r^{-l} = r^{-k} = r^{n-k} . \end{aligned}$$

Also sind die Mengen

$$\{e\},\ \{r, r^{n-1}\},\ \ldots,\ \{r^{m-1}, r^{m+1}\}, \{r^m\}$$

Konjugiertenklassen von D_n. Da wir damit alle Elemente von D_n erfaßt haben, sind die genannten Mengen sämtliche Konjugiertennklassen von D_n.

Zusatz: Für ungerades $n = 2m + 1$ können wir die obigen Rechnungen ebenfalls verwenden. In diesem Fall sind aber zusätzlich s und rs konjugiert, wie man an

$$(r^{m+1} s) s (r^{m+1} s)^{-1} = r^{2(m+1)} s = rs$$

sieht. Also gibt es für ungerades $n = 2m + 1$ die Konjugiertenklassen

$$\{s, rs, \ldots, r^{n-1} s\}, \{e\},\ \{r, r^{n-1}\},\ \ldots,\ \{r^m, r^{m+1}\} .$$

Aufgabe 4: (1+1+2=4 P) Für $n \geq 3$ sei $T_n \subset \mathbb{R}^2$ das reguläre n-Eck mit den Ecken

$$P_k := (\cos \frac{2\pi(k-1)}{n}, \sin \frac{2\pi(k-1)}{n}) \in \mathbb{R}^2, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Sei $S(T_n)$ die *volle* Symmetriegruppe von T_n. Nach der Vorlesung besteht $S(T_n)$ aus den Elementen der orthogonalen Gruppe O_2, deren zugehörige lineare Transformation des $\mathbb{R}^2$ die Ecken P_k untereinander permutiert. Insbesondere erhält man einen injektiven Gruppenhomomorphismus $S(T_n) \hookrightarrow S_n$.

(a) Bestimmen Sie Elemente aus $S(T_n)$, die auf die Elemente $r, s \in S_n$ (siehe Aufgabe 3) abgebildet werden.

(b) Zeigen Sie: Das Bild von $S(T_n)$ in S_n ist die Diedergruppe D_n.

(c) Bestimmen Sie für jede Konjugiertenklasse von $S(T_n)$ einen Vertreter, in Form einer Drehung (um einen gewissen Winkel) oder als Spiegelung (an einer gewissen Gerade).

Lösung: Wir bezeichnen den gegebenen injektiven Gruppenhomomorphismus $S(T_n) \hookrightarrow S_n$ mit ψ.

(a) Ist ρ die Drehung um den Winkel $2\pi/n$, d.h.

$$\rho(v) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} v ,\ \forall v \in \mathbb{R}^2 ,$$

so gilt offenbar $\psi(\rho) = r$. Die Abbildung σ sei die Spiegelung an der Achse durch den Seitenmittelpunkt von $\overline{P_m P_{m+1}}$ und den Nullpunkt. Dann gilt $\psi(\sigma) = s$. Setzt man $D(\phi) := \left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$, so kann man σ beschreiben durch

$$\sigma(v) = D(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D(-t) v ,\ \forall v \in \mathbb{R}^2 ,$$

wobei $t := \pi(2m-1)/n$. Dies kann man noch expliziter berechnen; es wird

$$\begin{aligned}
\sigma(v) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi(2m-1)/n) & \sin(2\pi(2m-1)/n) \\ \sin(2\pi(2m-1)/n) & -\cos(2\pi(2m-1)/n) \end{pmatrix} v \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(-2\pi/n) & \sin(-2\pi/n) \\ \sin(-2\pi/n) & -\cos(-2\pi/n) \end{pmatrix} v, & \text{falls } n = 2m \\ \begin{pmatrix} \cos(-4\pi/n) & \sin(-4\pi/n) \\ \sin(-4\pi/n) & -\cos(-4\pi/n) \end{pmatrix} v, & \text{falls } n = 2m+1\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Es sei U die von ρ und σ erzeugte Untergruppe von $S(T_n)$. Nun bildet der injektive Gruppenhomomorphismus $\psi : S(T_n) \hookrightarrow S_n$ die beiden Erzeuger von U auf die beiden Erzeuger von D_n ab. Also wird dabei U unter ψ bijektiv auf D_n abgebildet. Es genügt daher zu zeigen, daß $S(T_n) = U$.

Es sei also $\tau \in S(T_n)$. Zu zeigen ist, daß $\tau \in U$. Es gelte etwa $\tau(P_1) = P_k$ für ein k. Dann ist auch $\tau_2 := \rho^{-k+1}\tau \in S(T_n)$ und erfüllt $\tau_2(P_1) = P_1$. Es genügt zu zeigen, daß $\tau_2 \in U$. Wegen der Abstandstreue von τ_2 ist $\tau_2(P_2) = P_2$ oder $\tau_2(P_2) = P_{n-1}$. Im zweiten Fall können wir τ_2 mit der Spiegelung an der x-Achse verketten. (Diese ist im Falle n gerade durch $\rho\sigma$ und im Falle n ungerade durch $\rho^2\sigma$ gegeben.) Die so erhaltene Abbildung τ_3 erfüllt nun $\tau_3(P_1) = P_1$ und $\tau_3(P_2) = P_2$. Daraus folgt bereits $\tau_3 = \mathrm{Id} \in U$. Daraus folgt auch $\tau_2 \in U$.

(c) Aufgrund der Isomorphie von $S(T_n)$ und D_n können wir Aufgabe 3 verwenden.

- Fall $n = 2m$ gerade. Nach Aufgabe 3 (d) können wir die Spiegelung σ, die Spiegelung $\rho\sigma$ an der $x-$Achse, die identische Abbildung, sowie die Drehungen $\rho^1, \ldots, \rho^m$ um die Winkel $2\pi/n,\ 2\cdot 2\pi/n,\ \ldots,\ m \cdot 2\pi/n$ wählen.
- Fall $n = 2m+1$ ungerade. Nach dem Zusatz zu Aufgabe 3(d) können wir eine beliebige Spiegelung, die identische Abbildung sowie die Drehungen $\rho^1, \ldots, \rho^m$ wählen.