WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers
Andreas Martin

Algebra I

2. Übungsblatt

Aufgabe 1: (3 P) Die folgenden vier Gruppen haben alle 12 Elemente:

- $G_1 := \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 12$,
- $G_2 := \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 6 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 2$,
- $G_3 := D_6$ (siehe 1. Übungsblatt, Aufgabe 3).
- $G_4 := A_4$.

Zeigen Sie, dass alle diese Gruppen paarweise nicht isomorph sind. (Hinweis: welche dieser Gruppen sind kommutativ? Was sind die Ordnungen der Elemente von G_i?)

Lösung: Die Gruppen G_1 und G_2 sind kommutativ, denn sie sind Quotientengruppen von $\mathbb{Z}$ bzw. ein Produkt solcher Gruppen. In $G_3 = D_6$ sind z.B. die Elemente $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ und $(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$ nicht vertauschbar. In $G_4 = A_4$ sind z.B. die Elemente $(1\ 2\ 3)$ und $(1\ 2)(3\ 4)$ nicht vertauschbar.

Die Elemente von G_2 haben Ordnungen ≤ 6, da die beiden Faktoren von der Ordnung ≤ 6 sind. In G_1 gibt es jedoch Elemente der Ordnung 12, z.B. $\bar{1}$.

In der Gruppe $G_3 = D_6$ gibt es ein Element der Ordnung 6, nämlich den Zykel $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. In der Gruppe A_4 haben jedoch alle Elemente die Ordnungen $1, 2$ oder 3. Dies sieht man daran, daß sich jedes Element von S_4 als Produkt disjunkter Zykel schreiben läßt, wobei die Gesamtlängen dieser Zykel sich stets zu 4 addieren.

Also sind die vier angebenen Gruppen paarweise nicht isomorph.

Aufgabe 2: (1+1+1+1=4 P) Sei $n \geq 3$. Der *Typ* einer Permutation $\sigma \in S_n$ sei definiert als die *sortierte* Liste $Z(\sigma)$ der Zykellängen von σ. Z.B. für $n = 5$ und $\sigma = (1\ 2)\,(3\ 4)$ ist $Z(\sigma) = [1, 2, 2]$. Zeigen Sie:

(a) Ist $Z(\sigma) = [a_1, \ldots, a_r]$ so ist die Ordnung von σ das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_1, \ldots, a_r$.

(b) Zwei Elemente $\sigma, \tau \in S_n$ sind genau dann konjugiert in S_n (d.h. $\sigma = \rho\,\tau\rho^{-1}$ für ein $\rho \in S_n$), wenn $Z(\sigma) = Z(\tau)$.

(c) Nun sei n ungerade. Dann gibt es genau zwei verschiedene Konjugiertenklassen in der alternierenden Gruppe A_n, deren Elemente vom Typ $Z(\sigma) = [n]$ sind.

(d) Sind die Elemente $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ und $\tau = (2\ 3\ 7\ 5\ 4\ 1\ 6)$ in A_7 konjugiert?

Lösung:

(a) Es sei etwa $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_r$ die Zerlegung von $\sigma \in S_n$ in disjunkte Zykel. Dabei sei τ_i ein Zykel der Länge a_i für $i = 1, \ldots, r$. Es gilt offenbar

$$\operatorname{ord} \tau_i \;=\; a_i$$

für $i = 1, \ldots, r$. Ferner kommutieren diese disjunkten Zykel alle untereinander, d.h. es gilt

$$\sigma^n \;=\; \tau_1^n \cdot \ldots \cdot \tau_r^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt für $n \in \mathbb{N}$, daß

$$\begin{aligned} \sigma^n = e \quad &\Longleftrightarrow \quad \tau_i^n = e,\ \forall i \in \{1, \ldots, r\} \\ &\Longleftrightarrow \quad a_i | n,\ \forall i \in \{1, \ldots, r\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{kgV}(a_1, \ldots, a_r) | n \;. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\operatorname{ord} \sigma \;=\; \operatorname{kgV}(a_1, \ldots, a_r) \;.$$

(b) Zunächst beachte man, daß das Konjugierte eines Zykels der Länge l wieder ein Zykel der Länge l ist. Genauer gilt für alle $\rho \in S_n$ und alle paarweise verschiedenen $k_1, \ldots, k_l \in \{1, \ldots, n\}$ stets

$$\rho(k_1 \ \cdots \ k_l)\rho^{-1} \;=\; (\rho(k_1) \ \cdots \ \rho(k_l)) \;.$$

Ist also $\tau = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_r$ die Zerlegung von τ in disjunkte Zykel der Längen $a_1, \ldots, a_r$, so ist

$$\sigma \;:=\; \rho\tau\rho^{-1} = (\rho\tau_1\rho^{-1}) \cdot \ldots \cdot (\rho\tau_r\rho^{-1})$$

wiederum ein Produkt von Zykeln der Längen $a_1, \ldots, a_r$. Es folgt also $Z(\sigma) = Z(\tau)$, sofern σ und τ konjugiert in S_n sind.

Es seien nun umgekehrt $\sigma, \tau \in S_n$ gegeben mit

$$Z(\sigma) \;=\; Z(\tau) \;=\; [a_1, \ldots, a_r] \;.$$

Wir schreiben die Zerlegungen von σ und τ in disjunkte Zykel ausführlich als

$$\begin{aligned} \sigma \quad &= \quad \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_r \\ \sigma_i \quad &= \quad (k_{i,1} \ \cdots \ k_{i,a_i}),\ \forall i \in \{1, \ldots r\} \\ \tau \quad &= \quad \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_r \\ \tau_i \quad &= \quad (m_{i,1} \ \cdots \ m_{i,a_i}),\ \forall i \in \{1, \ldots r\} \end{aligned}$$

Dann hat die Menge

$$I \;:=\; \{(i,j) |\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq a_i\}$$

genau n Elemente, und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha \quad &: \quad I \to \{1, \ldots, n\},\ (i,j) \mapsto k_{i,j}, \\ \beta \quad &: \quad I \to \{1, \ldots, n\},\ (i,j) \mapsto m_{i,j} \end{aligned}$$

sind jeweils bijektiv. Folglich ist die Abbildung

$$\rho \;:=\; \alpha \circ \beta^{-1} \;\in S_n,$$

und es gilt

$$\rho(m_{i,j}) = k_{i,j},\ \forall (i,j) \in I\ .$$

Es folgt

$$\rho\tau_i\rho^{-1} \ = \ \sigma_i$$

für $i = 1, \ldots, r$, und somit

$$\rho\tau\rho^{-1} \ = \ \sigma\ .$$

Also sind σ und τ konjugiert in S_n.

(c) Man beachte, daß die Elemente in S_n vom Typ $Z(\sigma) = [n]$ genau die Zykel der Länge n sind, und diese sind in der Tat Elemente von A_n bei ungeradem n.

Es sei

$$\begin{aligned} \alpha &:= (1\,2\,\cdots\,n)\ \in A_n \\ \delta &:= (1\,2)\ \in S_n \setminus A_n \\ \beta &:= \delta\alpha\delta^{-1}\ \in A_n \end{aligned}$$

Es sei $\sigma \in A_n$ vom Typ $Z(\sigma) = [n]$. Nach (b) gibt es ein $\gamma \in S_n$ so, daß

$$\sigma \ = \ \gamma\alpha\gamma^{-1} \ = \ (\gamma(1)\,\gamma(2)\,\cdots\,\gamma(n))\ .$$

Wir wollen zeigen, daß gilt

$$\begin{aligned} (*) \quad & \sigma \sim_{A_n} \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \in A_n \\ (**) \quad & \sigma \sim_{A_n} \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \in S_n \setminus A_n\ . \end{aligned}$$

- $(*)$„ $\Leftarrow$ “: Klar nach Definition von $\sim_{A_n}$.
- $(*)$„ $\Rightarrow$ “: Es gelte also $\sigma = \rho\alpha\rho^{-1}$ für ein $\rho \in A_n$. Also gilt

$$\alpha \ = \ \rho^{-1}\sigma\rho \ = \ \rho^{-1}\gamma\alpha\gamma^{-1}\rho \ = \ \tau\alpha\tau^{-1}$$

  mit $\tau := \rho^{-1}\gamma$. Es sei $k := \tau(1)$. Es folgt wegen $\alpha\tau = \tau\alpha$

$$\tau(\nu) \ = \ \tau(\alpha^{\nu-1}(1)) \ = \ \alpha^{\nu-1}(\tau(1)) \ = \ \alpha^{\nu-1}(k) \ = \ \alpha^{k-1}(\nu)$$

  für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$, und somit $\tau = \alpha^{k-1} \in A_n$. Daraus folgt auch $\gamma = \rho\tau \in A_n$.
- $(**)$„ $\Leftarrow$ “: In diesem Fall ist

$$\sigma \ = \ \gamma\alpha\gamma^{-1} \ = \ \gamma\delta^{-1}\beta\delta\gamma^{-1} \ = \ \rho\beta\rho^{-1}$$

  mit $\rho := \gamma\delta^{-1} \in A_n$. Also ist $\sigma \sim_{A_n} \beta$.
- $(**)$„ $\Rightarrow$ “: Wäre $\gamma \in A_n$, so wäre nach (i) $\sigma \sim_{A_n} \alpha$ und somit $\beta \sim_{A_n} \alpha$. Wegen $\beta = \delta\alpha\delta^{-1}$ folgt aber nach (i) sogleich $\delta \in A_n$, ein Widerspruch.

Damit sind die Behauptungen $(*)$ und $(**)$ gezeigt. Insbesondere gibt es genau zwei Konjugiertenklassen in A_n der Elemente vom Typ $[n]$, nämlich

$$\{\gamma\alpha\gamma^{-1} |\ \gamma \in A_n\},\ \{\gamma\alpha\gamma^{-1} |\ \gamma \in S_n \setminus A_n\}\ .$$

(d) Mit

$$\rho \ := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}\ .$$

folgt

$$\rho\sigma\rho^{-1} \;=\; (\rho(1)\;\rho(2)\;\ldots\;\rho(7)) \;=\; \tau\;.$$

Nun gilt

$$\rho \;=\; (1\;2\;3\;7\;6)(4\;5)\;,$$

und somit

$$\operatorname{sign}\rho \;=\; (-1)^{5-1}(-1)^{2-1} \;=\; -1\;,$$

d.h. $\rho \in S_n \setminus A_n$. Nach (c) sind daher σ und τ nicht konjugiert in A_7.

Aufgabe 3: (2+3=5 P)

(a) Bestimmen Sie alle Konjugiertenklassen in der Gruppe A_4, und für jede solche Klasse die Anzahl ihrer Elemente.

(b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 4 Seiten eines Tetraeders entweder grün, rot oder blau zu färben? Dabei betrachte man zwei Färbungen als äquivalent, wenn man die eine in die andere durch eine Drehsymmetrie des Tetraeders überführen kann.

Lösung:

(a) Zunächst wissen wir nach Aufgabe 3, daß Elemente von verschiedenem Zykeltyp nicht zueinander konjugiert sind in A_4, da sie nicht einmal in S_4 konjugiert sind. Nun gilt

$$(1\;2\;3)((1\;2)(3\;4))(1\;2\;3)^{-1} \;=\; (1\;4)(2\;3)\;,$$

also sind $(1\;2)(3\;4)$ und $(1\;4)(2\;3)$ konjugiert in A_4. Analog sind auch $(1\;2)(3\;4)$ und $(1\;3)(2\;4)$ konjugiert in A_4. Also bilden die Elemente vom Zykeltyp $[2,2]$ eine Konjugiertenklasse der Größe 3. Die Identität bildet eine Konjugiertenklasse der Größe 1. Es bleiben die Elemente vom Zykeltyp $[1,3]$ zu untersuchen. Es gilt

$$(1\;3\;4)(1\;2\;3)(1\;3\;4)^{-1} \;=\; (2\;4\;3)\;,$$

also sind $(1\;2\;3)$ und $(2\;4\;3)$ konjugiert in A_4. Auf analoge Weise findet man, daß

$$\begin{aligned}
(1\;2\;3) \;&\sim_{A_4}\; (2\;4\;3) \;\sim_{A_4}\; (4\;1\;3) \;=\; (3\;4\;1) \;\sim_{A_4}\; (4\;2\;1) \;=\; (1\;4\;2)\\
(1\;3\;2) \;&\sim_{A_4}\; (3\;4\;2) \;\sim_{A_4}\; (4\;1\;2) \;=\; (2\;4\;1) \;\sim_{A_4}\; (4\;3\;1) \;=\; (1\;4\;3)\;.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun noch zeigen, daß $(1\;2\;3)$ und $(1\;3\;2)$ nicht konjugiert sind in

A_4. Dazu berechnen wir alle Konjugierten von (1 2 3). Es wird

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}(1\,2\,3)\mathrm{Id}^{-1} &= (1\,2\,3)\\
(1\,2)(3\,4)(1\,2\,3)(1\,2)(3\,4) &= (1\,4\,2)\\
(1\,3)(2\,4)(1\,2\,3)(1\,3)(2\,4) &= (1\,3\,4)\\
(1\,4)(2\,3)(1\,2\,3)(1\,4)(2\,3) &= (2\,4\,3)\\
(1\,2\,3)(1\,2\,3)(1\,2\,3)^{-1} &= (1\,2\,3)\\
(1\,3\,4)(1\,2\,3)(1\,3\,4)^{-1} &= (2\,4\,3)\\
(1\,4\,2)(1\,2\,3)(1\,4\,2)^{-1} &= (1\,3\,4)\\
(2\,4\,3)(1\,2\,3)(2\,4\,3)^{-1} &= (1\,4\,2)\\
(1\,3\,2)(1\,2\,3)(1\,3\,2)^{-1} &= (1\,2\,3)\\
(1\,2\,4)(1\,2\,3)(1\,2\,4)^{-1} &= (2\,4\,3)\\
(1\,4\,3)(1\,2\,3)(1\,4\,3)^{-1} &= (1\,4\,2)\\
(2\,3\,4)(1\,2\,3)(2\,3\,4)^{-1} &= (1\,3\,4)\ .
\end{aligned}$$

Also sind (1 2 3) und (1 3 2) nicht konjugiert in A_4.

Die Konjugiertenklassen von A_4 sind also

$$\begin{aligned}
&\{\mathrm{Id}\}\\
&\{(1\,2)(3\,4),\ (1\,3)(2\,4),\ (1\,4)(2\,3)\}\\
&\{(1\,2\,3),\ (1\,3\,4),\ (1\,4\,2),\ (2\,4\,3)\}\\
&\{(1\,3\,2),\ (1\,2\,4),\ (1\,4\,3),\ (2\,3\,4)\}\ .
\end{aligned}$$

Bemerkung: Man kann auch noch auf eine andere Weise zeigen, daß (1 2 3) und (1 3 2) nicht konjugiert sind in A_4. Es sei etwa $\rho \in S_4$ so, daß $\rho(1\ 3\ 2)\rho^{-1} = (1\ 2\ 3)$. Dann muß $\rho(4) = 4$ gelten. Mit $\tilde{\rho} := \rho|_{\{1,2,3\}}$ gilt $\tilde{\rho} \in S_3$ und $\tilde{\rho}(1\ 3\ 2)\tilde{\rho}^{-1} = (1\ 2\ 3)$. In der letzten Gleichung können alle Elemente in S_3 aufgefaßt werden. Es gilt jedoch $(1\ 3\ 2) = (1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2)^{-1}$ in S_3 und $\mathrm{sign}((1\ 2)) = -1$. Also sind nach der in Aufgabe 3(c) bewiesenen Behauptung die Elemente (1 2 3) und (1 3 2) nicht konjugiert in A_3. Folglich gilt $\mathrm{sign}(\rho) = \mathrm{sign}(\tilde{\rho}) = -1$. Also sind (1 2 3) und (1 3 2) nicht konjugiert in A_4.

Weitere Bemerkung: Wir wissen, daß $S_1(T) \cong A_4$ gilt, d.h. die Gruppe A_4 kann als die Drehsymmetriegruppe des Tetraeders aufgefaßt werden. Die 4 Konjugiertenklassen der A_4 stehen dann für

- die identische Abbildung,
- für Drehungen um die Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte (jeweils um den Winkel π),
- für die Drehungen um Achsen durch eine Ecke und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt im mathematisch positiven Sinn,
- für die Drehungen um Achsen durch eine Ecke und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt im mathematisch negativen Sinn.

(b) Es sei X die Menge aller Abbildungen $\{1,2,3,4\} \to \{r,g,b\}$. Jedes Element von X stellt dabei eine Färbung der vier Seiten des Tetraeders dar, ohne Berücksichtigung von Drehsymmetrien. Die Gruppe A_4 operiert auf X via

$$A_4 \times X \to X,\ (\sigma, f) \mapsto f\sigma^{-1}\ .$$

Wir wählen Vertreter der Konjugiertenklassen von A_4 und berechnen

$$\begin{aligned}
\left|X^{\mathrm{Id}}\right| &= 3^4 &= 81 \\
\left|X^{(1\ 2)(3\ 4)}\right| &= 3^2 &= 9 \\
\left|X^{(1\ 2\ 3)}\right| &= 3^2 &= 9 \\
\left|X^{(1\ 3\ 2)}\right| &= 3^2 &= 9\ .
\end{aligned}$$

Die Gruppe A_4 entspricht hier genau der Menge der Drehsymmetrien des Tetraeders. Zwei Färbungen sind also genau dann als äquivalent anzusehen, falls sie in derselben Bahn liegen, und die Anzahl der Bahnen ist demnach die gesuchte Anzahl. Nach einem Korollar der Vorlesung ist die Anzahl der Bahnen von X unter A_4 gegeben durch

$$\frac{1}{|A_4|}(81 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 4) \;=\; \frac{1}{12} \cdot 9(9 + 3 + 4 + 4) \;=\; 15\ .$$