WS 05/06
Priv.-Doz. Dr. S. Wewers
Andreas Martin

Algebra I

3. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1+1+1=3 P) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist die Abbildung $G \times G/H \to G/H$, die einem Paar (g_1, g_2H) die Nebenklasse g_1g_2H zuordnet, eine transitive Operation von G auf der Menge G/H. Was ist der Stabilisator einer Nebenklasse $aH \in G/H$?

(b) Ist X eine Menge und $G \times X \to X$ eine transitive Operation von G auf X, so gibt es eine Untergruppe $H \subset G$ und eine Bijektion $\alpha : X \to G/H$ so, dass

$$g \cdot \alpha(x) = \alpha(g \cdot x),$$

für alle $x \in X$ und $g \in G$. (Die Operation von G auf G/H auf der linken Seite dieser Gleichheit sei dabei wie in (a) definiert.)

(c) Eine transitive Operation von G auf einer Menge X heiße *normal*, wenn für alle $x, y \in X$ die Stabilisatoren gleich sind, $G_x = G_y$. Zeigen Sie: eine Untergruppe $H \subset G$ ist genau dann ein Normalteiler, wenn die Operation von G auf G/H normal ist.

Lösung:

(a) Die Abbildung

$$G \times G/H \to G,\ (g, N) \mapsto g * N := \{gn |\ n \in N\}$$

ist wohldefiniert. Es gilt

$$e * N \ = \ N$$

und

$$(g_1g_2) * N \ = \ g_1g_2N \ = \ g_1(g_2N) \ = \ g_1 * (g_2 * N)$$

für alle $g_1, g_2 \in G$ und alle $N \in G/H$. Somit handelt es sich in der Tat um eine (Links-) Operation von G auf G/H. Sie ist transitiv, denn zu je zwei Linksnebenklassen $g_1H, g_2H \in G/H$ setze man $g_3 := g_2g_1^{-1} \in G$; es gilt dann

$$g_3 * (g_1H) \ = \ (g_3g_1)H \ = \ g_2H\ .$$

Der Stabilisator der Nebenklassen aH ergibt sich zu

$$G_{aH} \ = \ \{g \in G |\ g * (aH) = aH\} \ = \ \{g \in G |\ a^{-1}ga \in H\} \ = \ aHa^{-1}\ .$$

(b) Es sei $y \in X$ beliebig, und $H := G_y$ der Stabilisator von y. Nach Vorlesung ist H eine Untergruppe von G, und die Abbildung

$$G/G_y \to Gy,\ gG_y \mapsto gy$$

ist bijektiv. Nun gilt $G_y = H$, und wegen der Transitivität der Operation ist $Gy = X$. Mithin hat diese Abbildung eine bijektive Umkehrabbildung

$$\alpha : X \to G/H,\ gy \mapsto gH,\ \forall g \in G\ .$$

Es sei nun $x \in X$. Also gilt $x = g_2 y$ für ein $g_2 \in G$. Es folgt für alle $g \in G$, daß

$$g\alpha(x) \;=\; g\alpha(g_2 y) \;=\; g(g_2 H) \;=\; (gg_2)H \;=\; \alpha(gg_2 y) \;=\; \alpha(gx)\ .$$

(c) Es gilt mit dem Ergebnis aus (a)

$$\begin{aligned} G \text{ operiert normal auf } G/H \quad &\Longleftrightarrow \quad G_{aH} \;=\; G_{eH},\ \forall a \in G \\ &\Longleftrightarrow \quad aHa^{-1} \;=\; H,\ \forall a \in G \\ &\Longleftrightarrow \quad H \text{ ist Normalteiler von } G\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (1/2+1/2+1+2+1=5 P) Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* von G ist definiert als die Teilmenge

$$Z_G := \{\ g \in G \ \mid\ gh = hg\ \ \forall\ h \in G\ \}.$$

Zeigen Sie:

(a) Das Zentrum ist eine Untergruppe von G.

(b) Die Abbildung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$, ist eine Operation von G auf sich selbst. Die Bahnen dieser Operation sind gerade sie Konjugiertenklassen von G.

(c) Ein Element $g \in G$ liegt im Zentrum von G genau dann, wenn die Konjugertenklasse von g aus genau einem Element besteht.

(d) Angenommen, G ist endlich und hat p^n Elemente, wobei p eine Primzahl ist und $n \geq 1$. Dann ist das Zentrum von G nichttrivial, d.h. es hat mehr als nur ein Element. (Hinweis: benutzen Sie (a)-(c) und die Bahnengleichung.)

(e) Geben Sie eine nichttriviale Gruppe an, deren Zentrum trivial ist.

Lösung:

(a) Zunächst ist $Z_G \neq \emptyset$, denn es gilt $e \in Z_G$. Es seien nun $a, b \in Z_G$. Dann gilt für alle $h \in G$, daß

$$(ab^{-1})h \;=\; a(h^{-1}b)^{-1} \;=\; a(bh^{-1})^{-1} \;=\; ahb^{-1} \;=\; h(ab^{-1})\ ,$$

und somit $ab^{-1} \in Z_G$. Also ist Z_G eine Untergruppe von G. Ferner gilt für alle $g \in Z_G$ und alle $a \in G$, daß

$$aga^{-1} \;=\; gaa^{-1} \;=\; g \in Z_G\ ,$$

d.h. Z_G ist Normalteiler von G.

(b) Die angegebene Abbildung $G \times G \to G$ werde mit $*$ bezeichnet, d.h. $g * h := ghg^{-1}$. Es gilt

$$e * h \;=\; ehe^{-1} \;=\; h$$

und

$$(g_1 g_2) * h \;=\; g_1 g_2 h (g_1 g_2)^{-1} \;=\; g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} \;=\; g_1 * (g_2 * h)$$

für alle $g_1, g_2, h \in G$. Also ist $*$ eine Operation von G auf sich selbst. Die Bahn eines $h \in G$ unter dieser Operation ist gleich

$$G * h \;=\; \{g * h |\, g \in G\} \;=\; \{ghg^{-1} |\, g \in G\}\;,$$

also gleich seiner Konjugiertenklasse.

(c) Stets ist g ein Element seiner Konjugiertenklasse. Ferner gilt

$$\begin{aligned} g \in Z_G \quad &\Longleftrightarrow \quad gh = hg,\ \forall h \in G \\ &\Longleftrightarrow \quad g = hgh^{-1},\ \forall h \in G \\ &\Longleftrightarrow \quad \{hgh^{-1} |\, h \in G\} \;=\; \{g\}\;. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

(d) Wir nehmen an, das Zentrum von G wäre trival und wollen einen Widerspruch herleiten.

Es gilt also

$$Z_G \;=\; \{e\}\;.$$

Nun ist $\{e\}$ eine Konjugiertenklasse von G. Es seien $x_1, \ldots, x_m$ Vertreter der übrigen Konjugiertenklassen $C_1, \ldots, C_m$, d.h. es gilt

$$C_i \;=\; \{g x_i g^{-1} \mid g \in G\}$$

und G ist die disjunkte Vereinigung

$$G \;=\; \{e\} \,\dot\cup\, C_1 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, C_m\;.$$

Die Elemente $x_1, \ldots, x_m$ liegen nicht im Zentrum von G. Nach (c) gilt daher $|C_i| > 1$ für $i = 1, \ldots, m$. Ferner gilt nach Vorlesung

$$|C_i| \;=\; [G : G_{x_i}]\;,$$

d.h. C_i ist ein Teiler von $|G|$. Daher ist $|C_i| = p^{k_i}$ für ein $k_i \geq 1$, für $i = 1, \ldots, m$. Es folgt

$$p^n \;=\; |G| \;=\; |\{e\}| + |C_1| + \ldots + |C_m| \;=\; 1 + p^{k_1} + \ldots + p^{k_m}\;.$$

Dann wäre aber 1 durch p teilbar, ein Widerspruch.

(e) Es sei $G := S_3$. Nach Blatt 2, Aufgabe 2(b) sind die Konjugiertenklassen von S_3 gegeben durch

$$\{\mathrm{Id}\},\ \{(1\ 2),\ (1\ 3),\ (2\ 3)\},\ \{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}\;.$$

Also besteht nur die Konjugiertenklasse von Id nur aus einem Element. Nach (c) ist daher

$$Z_{S_3} \;=\; \{\mathrm{Id}\}\;.$$

Aufgabe 3: (4 P) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: eine Gruppe G mit p^2 Elementen ist isomorph zu einer der beiden folgenden Gruppen:

- $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot p^2$,
- $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot p \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot p$.

(Hinweis: benutzen Sie Aufgabe 2 (d).)

Lösung: Alle Elemente $\neq e$ von G haben die Ordnung p oder p^2, denn 1, p und p^2 sind die einzigen Teiler der Gruppenordnung p^2. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Fall: G besitzt ein Element der Ordnung p^2.

  Dann ist G gleich der von diesem Element erzeugten zyklischen Untergruppe. In diesem Fall ist also
  $$G \;\cong\; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\;.$$

- Fall: G besitzt kein Element der Ordnung p^2.

  Nach Aufgabe 2(c) ist Z_G nichttrivial, also gibt es ein Element $a \in Z_G$ mit $a \neq e$. Es folgt $\operatorname{ord} a = p$. Die von a erzeugte Untergruppe $\langle a \rangle$ hat p Elemente. Also gibt es ein Element $b \in G$ derart, daß $b \notin \langle a \rangle$. Es folgt $\operatorname{ord} b = p$. Für die Untergruppe $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ gilt nun
  $$1 \;\leq\; |\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| \;<\; |\langle b \rangle| \;=\; p\;.$$
  Da ihre Ordnung ein Teiler von p^2 sein muß, folgt also
  $$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \;=\; \{e\}\;.$$
  Man betrachte nun die Abbildung
  $$\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G,\; (\overline{m}, \overline{n}) \mapsto a^m b^n\;.$$
  Wegen $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b = p$ ist die Abbildung wohldefiniert. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt
  $$\begin{aligned}\varphi\left((\overline{m_1}, \overline{m_2}) + (\overline{m_2}, \overline{n_2})\right) &= \varphi\left(\overline{m_1} + \overline{m_2}, \overline{n_1} + \overline{n_2}\right) &&= \varphi\left(\overline{m_1 + m_2}, \overline{n_1 + n_2}\right)\\ &= a^{m_1+m_2} b^{n_1 n_2} &&= a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2}\\ &= \varphi\left(\overline{m_1}, \overline{n_1}\right) \varphi\left(\overline{m_2}, \overline{m_2}\right)\end{aligned}$$
  für alle $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Man beachte beim vierten Gleichheitszeichen dabei, daß $a \in Z_G$ gilt. Wir wollen nun zeigen, daß $\operatorname{Kern} \varphi = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right)\right\}$ gilt.

  Es sei dazu $(\overline{m}, \overline{n}) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ derart, daß $a^m b^n = \varphi\left(\overline{m}, \overline{n}\right) = e$. Es gilt also
  $$b^n \;=\; a^{-m} \;\in\; \langle a \rangle \cap \langle b \rangle \;=\; \{e\}\;.$$
  Daraus folgt $b^n = a^m = e$ und somit $p|n$ und $p|m$. Daher ist $\overline{m} = \overline{n} = \overline{0}$.

  Damit ist $\operatorname{Kern} \varphi = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right)\right\}$ bewiesen, und der Homomorphismus φ ist injektiv. Da $Z/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und G gleich viele Elemente haben, ist φ sogar bijektiv, also ein Isomorphismus. Es gilt in diesem Fall also
  $$G \;\cong\; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\;.$$