Konstruktion von Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung mit der Kontinuitätsmethode

Diplomarbeit

vorgelegt von

Matthias Bergner

aus Chemnitz

Institut für Mathematik

der

Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

2003

Ausgabe des Themas: 19. Januar 2003

Abgabe der Arbeit: 18. Juli 2003

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil Friedrich Sauvigny

Zweitgutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil Sabine Pickenhain

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, das Plateausche Problem für Graphen vorgeschriebener mittlerer Krümmung zu lösen. Allgemein wird dieses Problem als ein Variationsproblem aufgefasst und entsprechende Methoden der Variationsrechnung angewandt. Wir werden hier einen anderen Weg zur Konstruktion von Lösungen beschreiten, nämlich die Kontinuitätsmethode. Als Grundlage dient uns die Arbeit [7] von F. Sauvigny, in welcher eine solche Methode vorgeschlagen wurde.

In §1 leiten wir zunächst die Differentialgleichungen für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung her, einerseits für Graphen und andererseits für konform parametrisierte Flächen.

In §2 betrachten wir die Variation einer konform parametrisierten Fläche in Richtung ihrer Normalen. Wir zeigen dort, dass die variierte Fläche eine vorgeschriebene mittlere Krümmung annimmt genau dann, falls eine nichtlineare, elliptische Differentialgleichung erfüllt ist. Diese Differentialgleichung können wir mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes lösen, müssen jedoch von der Ausgangsfläche strikte Stabilität (vgl. §2, Def. 2) fordern.

Mit Hilfe einer Differentialgleichung für die Normale (Hilfssatz 1 in §2), welche wir der Arbeit [4] entnommen haben, untersuchen wir dann in §4, unter welchen Voraussetzungen eine Fläche strikt stabil ist. Es zeigt sich, das dies der Fall ist falls die betrachtete Fläche ein Graph über der x, y-Ebene ist und die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ die Voraussetzung

$$\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z} \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

erfüllt.

In §5 werden wir Kompaktheitsaussagen für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung herleiten. Wir betrachten eine Folge von Graphen vorgeschriebener mittlerer Krümmung. Zunächst werden wir mit dem Uniformisierungssatz (vgl. [9]) auf jeder Fläche konforme Parameter einführen. Mit Hilfe der bekannten a-priori Abschätzungen für Systeme mit quadratischem Wachstum im Gradienten (siehe [9]) werden wir a-priori Abschätzungen dieser Folge sowohl im Inneren als auch bis zum Rand erbringen (vgl. §5, Hilfssatz 2). Nach Auswahl einer konvergenten Teilfolge erhalten wir dann eine konform parametrisierte Grenzfläche. Diese lässt sich erneut als Graph parametrisieren, was wir mit den Sätzen aus §4 zeigen.

Die Kontinuitätmethode werden wir dann in §6 zeigen. Es sind dafür zwei Teile zu zeigen, nämlich sowohl die Offenheit als auch die Abgeschlossenheit. Die Offenheit weisen wir mit dem in §2 gezeigten Variationsergebnis nach. Als wichtiges Hilfsmittel benötigen wir jedoch einen Fortsetzungssatz (siehe [3]), welcher es erlaubt, eine Fläche als Lösung der H-Flächengleichung über den Rand hinweg fortzusetzen. Der Nachweis der Abgeschlossenheit erfolgt mit den Sätzen aus §5.

In §7 zeigen wir gewisse Schauderabschätzungen mit Randwerten, welche wir in dieser Arbeit benötigen. Als Basis dienen uns die Schauderabschätzungen aus [9], Kap XV, §7, welche dort nur im Falle von Null-Randwerten gezeigt werden.

Schließlich werden wir in §8 einige Anwendungen der Kontinuitätsmethode angeben. Wir werden das Dirichletproblem der H-Flächengleichung für Graphen lösen im Falle konstanter mittlerer Krümmung. Außerdem werden wir für die Gauss-Laplace-Gleichung des Kapillaritätsproblemes Lösungen kontruieren.

An dieser Stelle möchte ich recht herzlich Herrn Prof.Dr.F.Sauvigny danken, unter dessen Anleitung ich diese Arbeit geschrieben habe. Durch seine sehr interessanten Vorlesungen und Seminare über Analysis bin ich in die Themengebiete der partiellen Differentialgleichungen und der Differentialgeometrie eingeführt worden. Dadurch wurde die Grundlage für diese Diplomarbeit gelegt.
Außerdem gilt mein Dank Herrn Dr.rer.nat.F.Müller, welcher mir stets mit hilfreichen Hinweisen zu meiner Arbeit zur Verfügung stand.

Inhaltsverzeichnis

§1 Flächen und ihre Parametrisierungen

Definition 1 : Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene, beschränkte Menge. Dann verstehen wir unter einer Parametrisierung einer Fläche eine Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \ .$$

Ein $(u_0, v_0) \in \Omega$ nennen wir Verzweigungspunkt von $\mathbf{x}$, falls

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = 0$$

gilt, ansonsten nennen wir $\mathbf{x}$ regulär in (u_0, v_0). Eine Fläche, welche keine Verzweigungspunkte besitzt, bezeichnen wir als regulär. Hierbei bezeichnet $\wedge$ das im $\mathbb{R}^3$ erklärte Kreuzprodukt.
Zwei Parametrisierungen $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{x}' : \overline{\Omega}' \to \mathbb{R}^3$ nennen wir äquivalent, falls es einen positiv orientierten Diffeomorphismus $\phi : \overline{\Omega}' \to \overline{\Omega}$ gibt mit $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \circ \phi$. Wir sagen dann, dass $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ die selbe Fläche im $\mathbb{R}^3$ parametrisieren.

Bemerkung: Im allgemeinen identifizieren wir eine Fläche mit ihrer gegebenen Parametrisierung $\mathbf{x}$.

Für eine Fläche $\mathbf{x}$ lässt sich in den regulären Punkten ihre Normale $\mathbf{X}$ durch

$$\mathbf{X}(u,v) := \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(u,v)}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(u,v)|} \quad , \ (u,v) \in \tilde{\Omega}$$

erklären. Dabei haben wir mit

$$\tilde{\Omega} := \{(u,v) \in \Omega \mid \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(u,v) \neq 0\}$$

die Menge aller regulären Punkte in Ω gesetzt.

In der Differentialgeometrie werden die folgenden Größen einer Fläche erklärt

$$H = H(u,v) \ := \ \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} \tag{1.1}$$

$$K = K(u,v) \ := \ \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \ . \tag{1.2}$$

Man nennt H die mittlere Krümmung und K die Gauss'sche Krümmung der Fläche. Die in diesen Formeln auftretenden Größen E, F, G sind die Koeffizienten der ersten Fundamentalform, erkärt durch

$$E := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \ , \ F := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \text{ und } G := \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \ .$$

L, M, N bezeichnen die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform, definiert durch

$$L := -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{X}_u \ , \ M := -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{X}_u \text{ und } N := -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{X}_v \ .$$

Wir bemerken, dass die Definition von E, F, G sowie L, M, N von der Parametrisierung der Fläche abhängig sind, jedoch sind die mittlere und Gauss'sche Krümmung invariant gegenüber positiv orientierter Umparametrisierung der Fläche, wie in der Differentialgeometrie nachgewiesen wird.

Wir möchten nun zunächst einige wichtige Eigenschaften von Parametrisierungen einer Fläche nennen. Es gilt

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{X}_u = 0 = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{X}_v \\
\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{X}_u = 0 = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{X}_v \\
\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X} = 0 = \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X} \\
\mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u = 0 = \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v \, .
\end{gathered}$$

Diese Gleichungen erhält man jeweils durch Differentiation der Identitäten $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{X} = 0$ und $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = 1$.

Definition 2 : Zu $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ betrachten wir eine Fläche $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to \mathcal{O} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Weiter sei $\tilde{H} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Wir sagen, dass die Fläche $\mathbf{x}$ die vorgeschriebene mittlere Krümmung $\tilde{H}$ besitzt, falls für die in (1.1) erklärte mittlere Krümmung die Beziehung

$$\tilde{H}(\mathbf{x}(u,v)) = H(u,v) \quad \text{für } (u,v) \in \Omega$$

gilt. In diesem Falle nennen wir die Fläche eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H oder kurz eine H-Fläche.

Vom Standpunkt der partiellen Differentialgleichugen aus erweisen sich die folgenden speziellen Parameter einer Fläche als sehr hilfreich.

Definition 3 : Eine Parametrisierung $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ einer Fläche nennen wir konforme Parameter, falls die Relationen

$$|\mathbf{x}_u|^2 = |\mathbf{x}_v|^2 = E(u,v) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0 \tag{1.3}$$

gelten.

Wir bemerken, dass im Falle von konformen Parametern für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform $E = G$ und $F = 0$ richtig ist. Wir kommen nun zu folgendem

Hilfssatz 1 : *Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ offen und $H = H(x,y,z) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine vorgegebene Funktion. Weiter sei $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to \mathcal{O}$ eine reguläre Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H in konformen Parametern. Dann ist die Differentialgleichung*

$$\triangle \mathbf{x} = 2H(\mathbf{x}) \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{in } \Omega \tag{1.4}$$

erfüllt.

Beweis:
Durch Differentiation von (1.3) ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu} &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} \\
\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv} &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} \\
\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v &= -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} \\
\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u &= -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uu} \, .
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\triangle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_u &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \\
&= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = 0 \, .
\end{aligned}$$

Analog dazu ergibt sich

$$\triangle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_v = 0 \,.$$

Da nun $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{X}$ in jedem Punkt eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^3$ erzeugen, schließen wir mit Hilfe von (1.1)

$$\begin{aligned}\triangle \mathbf{x} &= (\triangle \mathbf{x} \cdot \mathbf{X})\,\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{X})\,\mathbf{X} \\ &= \frac{L+N}{2E} 2EX = 2EH(\mathbf{x})\mathbf{X} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\end{aligned}$$

q.e.d.

Wir wollen nun noch eine weitere mögliche Parametrisierung einer Fläche betrachten.

Definition 4 : Für eine Funktion $\zeta = \zeta(x,y) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ erklären wir durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x,y) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \;,\; \mathbf{x}(x,y) := (x, y, \zeta(x,y)) \tag{1.5}$$

die Parametrisierung einer Fläche. Diese Parametrisierung bezeichnen wir als den Graph von ζ über der x,y-Ebene.

Hilfssatz 2 : *Es sei $\zeta = \zeta(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gegeben. Dann besitzt ζ als Graph über der x,y-Ebene genau dann die mittlere Krümmung H, falls ζ der quasilinearen, elliptischen Differentialgleichung*

$$\mathcal{M}\zeta := (1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega \tag{1.6}$$

genügt. Den Operator $\mathcal{M}$ nennen wir den Minimalflächenoperator. Setzen wir $\nabla\zeta := (\zeta_x, \zeta_y)$ in Ω, so ist diese Differentialgleichung äquivalent zur folgenden in Divergenzform

$$div\Big((1+|\nabla\zeta|^2)^{-\frac{1}{2}}\nabla\zeta\Big) = 2H(x,y,\zeta(x,y)) \quad in\,\Omega\,,$$

wobei wir für ein Vektorfeld $a(x,y) = (a_1(x,y), a_2(x,y)) : \Omega \to \mathbb{R}^2 \in C^1(\Omega)$ seine Divergenz erklären durch

$$div\, a := \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} \,.$$

Beweis:
Mit $\mathbf{x}(x,y) := (x,y,\zeta(x,y))$ berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_x &= (1, 0, \zeta_x) \\ \mathbf{x}_y &= (0, 1, \zeta_y) \\ \mathbf{x}_x \wedge \mathbf{x}_y &= (-\zeta_x, -\zeta_y, 1) \\ \mathbf{X} &= \sigma^{-\frac{1}{2}}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)\,,\end{aligned}$$

wobei wir

$$\sigma := |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 = 1 + |\nabla\zeta|^2 = 1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2$$

setzen. Damit ergibt sich für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$\begin{aligned}E = \mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_x &= 1 + \zeta_x^2 \\ F = \mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_y &= \zeta_x\zeta_y \\ G = \mathbf{x}_y \cdot \mathbf{x}_y &= 1 + \zeta_y^2 \,.\end{aligned}$$

Für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform leiten wir

$$\begin{aligned} L = \mathbf{x}_{xx} \cdot \mathbf{X} &= \sigma^{-\frac{1}{2}} \zeta_{xx} \\ M = \mathbf{x}_{xy} \cdot \mathbf{X} &= \sigma^{-\frac{1}{2}} \zeta_{xy} \\ N = \mathbf{x}_{yy} \cdot \mathbf{X} &= \sigma^{-\frac{1}{2}} \zeta_{yy} \end{aligned}$$

her. Gemäss (1.1) gilt für die mittlere Krümmung H

$$\begin{aligned} H &= \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} \\ &= \sigma^{-\frac{1}{2}} \frac{(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy}}{2(1+\zeta_x^2)(1+\zeta_y^2) - 2\zeta_x^2\zeta_y^2} \\ &= \sigma^{-\frac{1}{2}} \frac{(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy}}{2(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)} \\ &= \frac{\sigma^{-\frac{3}{2}}}{2}\Big((1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_x\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy}\Big) , \end{aligned} \tag{1.7}$$

woraus wir sofort

$$(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{3}{2}}$$

schlussfolgern. Wir zeigen nun noch die Differentialgleichung in Divergenzform. Dazu berechen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\Big((1+|\nabla\zeta|^2)^{-\frac{1}{2}}\nabla\zeta\Big) &= \Big(\sigma^{-\frac{1}{2}}\zeta_x\Big)_x + \Big(\sigma^{-\frac{1}{2}}\zeta_y\Big)_y \\ &= -\sigma^{-\frac{3}{2}}(\zeta_x^2\zeta_{xx} + \zeta_x\zeta_y\zeta_{xy}) + \sigma^{-\frac{1}{2}}\,\zeta_{xx} \\ &\quad -\sigma^{-\frac{3}{2}}(\zeta_y^2\zeta_{yy} + \zeta_x\zeta_y\zeta_{xy}) + \sigma^{-\frac{1}{2}}\,\zeta_{yy} \\ &= \sigma^{-\frac{3}{2}}(-\zeta_x^2\,\zeta_{xx} + \sigma\zeta_{xx} - \zeta_y^2\,\zeta_{yy} + \sigma\zeta_{yy} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy}) \\ &= \sigma^{-\frac{3}{2}}\Big((1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy}\Big) \\ &= 2H(x,y,\zeta(x,y)) , \end{aligned}$$

wobei wir (1.7) verwendet haben. q.e.d.

Bemerkung: Wie wir im Beweis dieses Satzes gesehen haben, lässt sich die Normale des Graphen über der x, y-Ebene schreiben als

$$\mathbf{X} = \sigma^{-\frac{1}{2}}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)$$

mit $\sigma := 1 + |\nabla\zeta|^2$. Somit ist ein Graph stets verzweigungspunktfrei und seine Normale erfüllt die Bedingung

$$\mathbf{X} \cdot e_3 = \sigma^{-\frac{1}{2}} > 0 ,$$

wobei $e_3 = (0,0,1)$ gesetzt ist. Diese Ungleichung wird sich später für Stabilitätsaussagen als nützlich erweisen.
Es sei nun $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in C^0(\mathbb{R}^3)$ die vorgeschriebene mittlere Krümmung.
Wir betrachten das folgende Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\zeta = \zeta(x,y) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ &(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega \\ &\zeta(x,y) = g(x,y) \quad \text{auf } \partial\Omega , \end{aligned} \tag{1.8}$$

welches das Dirichletproblem der H-Flächengleichung in nichtparametrischer Form genannt wird. Es ist dabei $g \in C^0(\partial\Omega)$ eine beliebige Randverteilung. Eine Lösung dieses Randwertproblemes ist wegen Hilfssatz 2 sofort als Graph eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H. Dieses Problem besitzt den Vorteil, dass es nur aus einer Gleichung besteht. Man kann außerdem Dirichlet-Randwerte vorschreiben. Die Schwierigkeit dieses Problemes liegt jedoch in der komplizierten Nichtlinearität der Gleichung.

Gegenüberstellend kann man sich auch das folgende Randwertproblem stellen

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ &\triangle \mathbf{x} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{sowie} \quad |\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 = 0 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \quad \text{in } \Omega \\ &\mathbf{x}|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to \Gamma \text{ topologisch} . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Hierbei ist $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine einfach geschlossene Jordankurve im $\mathbb{R}^3$. Die geforderte Randbedingung bedeutet, dass $\mathbf{x}|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to \Gamma$ eine stetige und bijektive Abbildung ist. Falls eine Lösung von (1.9) keine Verzweigungspunkte enthält, so ist sie wegen Hilfssatz 1 sofort eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H. Dieses Problem besitzt gegenüber (1.8) den Vorteil der einfacheren Differentialgleichung, welche als Hauptteil den Laplace-Operator besitzt. Ihre Schwierigkeit besteht jedoch in der nichtlinearen Randbedingung sowie in der Tatsache, dass eine Lösung noch Verzweigungspunkte besitzen kann.

Falls man in (1.9) die Forderung der konformen Parametrisierung, d.h. $|\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 = 0 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$, weglässt, so kann man zusätzlich Dirichlet-Randwerte fordern und erhält dann das Dirichletproblem für das H-Flächensystem. Dieses besitzt unter gewissen Zusatzvoraussetzungen eine Lösung (vgl. [9], Kap. XVII, §4). Die Voraussetzung der konformen Parameter ist jedoch wichtig, da nur in diesem Fall die differentialgeometrische mittlere Krümmung einer Lösung von (1.9) mit der vorgeschriebenen Funktion H übereinstimmt. Wir erkennen, dass jedes der beiden Probleme (1.8) und (1.9) als Lösung Flächen der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H besitzen. Zusätzlich hat jedes der beiden Probleme gewisse Vorteile wie Nachteile. In folgenden werden wir beide Probleme parallel zu studieren haben.

§2 Normalvariation einer H-Fläche in konformen Parametern

Wir benötigen zunächst eine Differentialgleichung für die Normale $\mathbf{X}$ einer Fläche in konformen Parametern.

Hilfssatz 1 : *Es sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ offen, $H = H(x,y,z) : \mathcal{O} \to \mathbb{R} \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$ die vorgeschriebene mittlere Krümmung zu einem Hölderexponenten $\alpha \in (0,1)$. Weiter sei eine H-Fläche $\mathbf{x} : \Omega \to \mathcal{O} \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ in konformen Parametern gegeben, welche in Ω verzweigungspunktfrei sei. Dann ist $\mathbf{X} \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ richtig und die Normale erfüllt die Differentialgleichung*

$$\triangle \mathbf{X} + 2E\Big(2H(\mathbf{x})^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X}\Big)\mathbf{X} + 2E\nabla H = 0 \quad \textit{in}\ \Omega\ ;$$

wobei $E = |\mathbf{x}_u|^2$ und K die Gauss'sche Krümmung der Fläche $\mathbf{x}$ seien.

Beweis:
1.) Da wegen Hilfssatz 1 aus §1

$$\triangle \mathbf{x} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{in } \Omega \tag{2.1}$$

gilt, $H \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$ und $\mathbf{x} \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ richtig ist, ergibt sich für die rechte Seite aus (2.1)

$$2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \in C^{1+\alpha}(\Omega)\ .$$

Mit potentialtheoretischen Mitteln (siehe [2]) können wir damit $\mathbf{x} \in C^{3+\alpha}(\Omega)$ ableiten. Da nun die Fläche $\mathbf{x}$ verzeigungspunktfrei ist, können wir ihre Normale in Ω durch

$$\mathbf{X}(u,v) := \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(u,v)}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(u,v)|} \quad \text{für } (u,v) \in \Omega$$

erklären und wir erkennen $\mathbf{X} \in C^{2+\alpha}(\Omega)$.

2.) Da die Fläche keine Verzweigungspunkte besitzt, bilden die Vektoren $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ sowie $\mathbf{X}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$ und $E = |\mathbf{x}_u|^2 = |\mathbf{x}_v|^2 > 0$ ist richtig. Daher gelten die folgenden Darstellungen

$$\mathbf{X}_u = -\frac{L}{E}\mathbf{x}_u - \frac{M}{E}\mathbf{x}_v \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_v = -\frac{M}{E}\mathbf{x}_u - \frac{N}{E}\mathbf{x}_v \tag{2.2}$$

mit den Koeffizienten L, M, N der zweiten Fundamentalform. Damit berechnen wir unter Beachtung von (1.1) und (1.2)

$$\begin{aligned}
\triangle\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} &= \mathbf{X}_{uu}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{X}_{vv}\cdot\mathbf{X} = -\mathbf{X}_u\cdot\mathbf{X}_u - \mathbf{X}_v\cdot\mathbf{X}_v \\
&= -(\frac{L}{E}\mathbf{x}_u + \frac{M}{E}\mathbf{x}_v)\cdot(\frac{L}{E}\mathbf{x}_u + \frac{M}{E}\mathbf{x}_v) - (\frac{M}{E}\mathbf{x}_u + \frac{N}{E}\mathbf{x}_v)\cdot(\frac{M}{E}\mathbf{x}_u + \frac{N}{E}\mathbf{x}_v) \\
&= -\frac{L^2}{E} - \frac{M^2}{E} - \frac{M^2}{E} - \frac{N^2}{E} \\
&= -E\Big(\frac{L^2 + 2LN + N^2}{E^2} - 2\frac{LN - M^2}{E^2}\Big) \\
&= -E\Big(4(\frac{L+N}{2E})^2 - 2\frac{LN - M^2}{E^2}\Big) \\
&= -2E(2H(\mathbf{x})^2 - K)\,.
\end{aligned}$$

und wir erkennen

$$\Big(\triangle\mathbf{X} + 2E\Big(2H(\mathbf{x})^2 - K - \nabla H\cdot\mathbf{X}\Big)\mathbf{X} + 2E\nabla H\Big)\cdot\mathbf{X} = 0 \quad \text{in } \Omega\,. \tag{2.3}$$

Wegen (2.2) gilt nun

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\wedge\mathbf{X}_u &= -\frac{L}{E}\mathbf{x}_v + \frac{M}{E}\mathbf{x}_u = \frac{M}{E}\mathbf{x}_u + \frac{N}{E}\mathbf{x}_v - \frac{N+L}{E}\mathbf{x}_v = -\mathbf{X}_v - 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_v \\
\mathbf{X}\wedge\mathbf{X}_v &= -\frac{M}{E}\mathbf{x}_v + \frac{N}{E}\mathbf{x}_u = -\frac{L}{E}\mathbf{x}_u - \frac{M}{E}\mathbf{x}_v + \frac{N+L}{E}\mathbf{x}_u = \mathbf{X}_u + 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u\,.
\end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\wedge\triangle\mathbf{X} &= \mathbf{X}\wedge\mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}\wedge\mathbf{X}_{vv} = (\mathbf{X}\wedge\mathbf{X}_u)_u + (\mathbf{X}\wedge\mathbf{X}_v)_v \\
&= -\mathbf{X}_{uv} - 2(\nabla H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}_u)\mathbf{x}_v - 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_{uv} \\
&\quad +\mathbf{X}_{uv} + 2(\nabla H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}_v)\mathbf{x}_u + 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_{uv} \\
&= 2(\nabla H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_u\wedge\mathbf{X}) + 2(\nabla H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_v\wedge\mathbf{X}) \\
&= 2\Big((\nabla H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}_u)\mathbf{x}_u + (\nabla H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}_v)\mathbf{x}_v\Big)\wedge\mathbf{X} \\
&= 2E\Big((\nabla H(\mathbf{x}) - (\nabla H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{X})\mathbf{X}\Big)\wedge\mathbf{X} \\
&= -\mathbf{X}\wedge(2E\nabla H(\mathbf{x}))\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Darstellung

$$\nabla H(\mathbf{x}) = \frac{1}{E}(\nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_u)\mathbf{x}_u + \frac{1}{E}(\nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_v)\mathbf{x}_v + (\nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X})\mathbf{X}$$

ausnutzen. Wir schließen daraus, dass

$$\mathbf{X} \wedge \Big(\triangle \mathbf{X} + 2E\Big(2H(\mathbf{x})^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X}\Big)\mathbf{X} + 2E\nabla H\Big) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{2.4}$$

gilt. Zusammen mit (2.3) erhalten wir die behauptete Differentialgleichung für $\mathbf{X}$ in Ω. q.e.d.

Bemerkung: Diesen Satz haben wir der Arbeit [4] entnommen. Dort wird diese Differentialgleichung auch für Flächen mit Verzweigungspunkten gezeigt. Wir werden in §4 die Verzweigungspunkte explizit ausschließen und benötigen diesen Satz daher nur im Falle regulärer Flächen.

Wir betrachten nun die vorgeschriebene mittlere Krümmung

$$H = H(x, y, z) : \mathcal{O} \to \mathbb{R} \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$$

auf der offenen Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$. Auf dem Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, welches ein beschränktes, einfach zusammenhängendes $C^{2+\alpha}$-Gebiet sei, sei eine H-Fläche in konformen Parametern

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) : \overline{\Omega} \to \mathcal{O} \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ &\triangle \mathbf{x} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{in } \Omega \\ &|\mathbf{x}_u|^2 = |\mathbf{x}_v|^2 = E(u, v)\ ,\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

gegeben, welche in $\overline{\Omega}$ keine Verzweigungspunkte besitze. Zu dieser Fläche betrachten wir ihre Variation in Richtung der Normale

$$\overline{\mathbf{x}}(u, v) := \mathbf{x}(u, v) + \zeta(u, v)\mathbf{X}(u, v) \quad \text{für } (u, v) \in \overline{\Omega} \tag{2.5}$$

mit einer Funktion $\zeta = \zeta(u, v) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Zunächst folgt damit für die normalvariierte Fläche $\overline{\mathbf{x}} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Weiterhin können wir wegen $\mathbf{x}(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{O}$ ein $\varepsilon_1 > 0$ derart ermitteln, dass für alle $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $||\zeta||_0^\Omega \leq \varepsilon_1$ die Aussage

$$\overline{\mathbf{x}}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \zeta(u, v)\mathbf{X}(u, v) \in \mathcal{O} \quad \text{für alle } (u, v) \in \overline{\Omega} \tag{2.6}$$

richtig ist. Wir wollen ζ so ermitteln, dass die variierte Fläche $\overline{\mathbf{x}}$ erneut eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H ist. Wir werden zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, falls ζ einer gewissen nichtlinearen, elliptischen Differentialgleichung genügt. Zunächst differenzieren wir (2.5) und erhalten damit

$$\overline{\mathbf{x}}_u = \mathbf{x}_u + \zeta_u \mathbf{X} + \zeta \mathbf{X}_u\ ;\ \overline{\mathbf{x}}_v = \mathbf{x}_v + \zeta_v \mathbf{X} + \zeta \mathbf{X}_v\ . \tag{2.7}$$

Nochmaliges Differenzieren liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}}_{uu} &= \mathbf{x}_{uu} + \zeta_{uu}\mathbf{X} + 2\zeta_u \mathbf{X}_u + \zeta \mathbf{X}_{uu} \\ \overline{\mathbf{x}}_{uv} &= \mathbf{x}_{uv} + \zeta_{uv}\mathbf{X} + \zeta_u \mathbf{X}_v + \zeta_v \mathbf{X}_u + \zeta \mathbf{X}_{uv} \\ \overline{\mathbf{x}}_{vv} &= \mathbf{x}_{vv} + \zeta_{vv}\mathbf{X} + 2\zeta_v \mathbf{X}_v + \zeta \mathbf{X}_{vv}\ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Von nun an bezeichnen wir Terme, welche von höherer als linearer Ordnung in ζ, ζ_u, ζ_v, ζ_{uu}, ζ_{uv}, ζ_{vv} sind, durch ... . Solche Terme sind z.B. $\zeta^2, \zeta_u\zeta_v, \zeta\zeta_{uu}$.
Wir bezeichnen nun mit $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von $\overline{\mathbf{x}}$ und $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform. Unter Verwendung von (2.7) entwickeln wir

$$\begin{aligned} \frac{\overline{E}}{E} &= \frac{1}{E}\overline{\mathbf{x}}_u \cdot \overline{\mathbf{x}}_u = 1 - 2\zeta\frac{L}{E} + ... \\ \frac{\overline{F}}{E} &= \frac{1}{E}\overline{\mathbf{x}}_u \cdot \overline{\mathbf{x}}_v = -2\zeta\frac{M}{E} + ... \\ \frac{\overline{G}}{E} &= \frac{1}{E}\overline{\mathbf{x}}_v \cdot \overline{\mathbf{x}}_v = 1 - 2\zeta\frac{N}{E} + ... \end{aligned} \tag{2.9}$$

Weiter gilt mit Hilfe der Darstellungen (2.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_u \wedge \mathbf{x}_v &= \mathbf{x}_u \wedge (-\frac{M}{E}\mathbf{x}_u - \frac{N}{E}\mathbf{x}_v) + (-\frac{L}{E}\mathbf{x}_u - \frac{M}{E}\mathbf{x}_v) \wedge \mathbf{x}_v \\ &= -\frac{L+N}{E}\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = -2H\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \ . \end{aligned}$$

Damit entwickeln wir weiter

$$\begin{aligned} \frac{1}{E}\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v &= \frac{1}{E}(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v - \zeta_v\mathbf{x}_v + \zeta\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{X}_v - \zeta_u\mathbf{x}_u + \zeta\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{x}_v) + ... \\ &= \frac{1}{E}(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v - \zeta_v\mathbf{x}_v - \zeta_u\mathbf{x}_u - 2\zeta H\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) + ... \\ &= (1 - 2\zeta H)\mathbf{X} - \frac{1}{E}(\zeta_u\mathbf{x}_u + \zeta_v\mathbf{x}_v) + ... \ , \end{aligned}$$

womit wir

$$\frac{1}{E^2}|\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^2 = (1 - 2H\zeta)^2 + ... = 1 - 4H\zeta + ... \tag{2.10}$$

erhalten. Unter Beachtung von (2.6) besitzt die variierte Fläche $\overline{\mathbf{x}}$ hat genau dann die vorgeschriebene mittlere Krümmung H, falls die Gleichung

$$\begin{aligned} H(\overline{\mathbf{x}}) &= \frac{\overline{G}\,\overline{L} - 2\overline{F}\,\overline{M} + \overline{E}\,\overline{M}}{2(\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2)} \\ &= \frac{(\overline{G}\,\overline{\mathbf{x}}_{uu} - 2\overline{F}\,\overline{\mathbf{x}}_{uv} + \overline{E}\,\overline{\mathbf{x}}_{vv}) \cdot \overline{\mathbf{X}}}{2((\overline{\mathbf{x}}_u \cdot \overline{\mathbf{x}}_u)(\overline{\mathbf{x}}_v \cdot \overline{\mathbf{x}}_v) - (\overline{\mathbf{x}}_u \cdot \overline{\mathbf{x}}_v)^2)} \\ &= \frac{(\overline{G}\,\overline{\mathbf{x}}_{uu} - 2\overline{F}\,\overline{\mathbf{x}}_{uv} + \overline{E}\,\overline{\mathbf{x}}_{vv}) \cdot \overline{\mathbf{X}}}{2|\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^2} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Indem wir mit $\frac{2}{E^2}|\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^3$ durchmultiplizieren, erhalten wir

$$2H(\overline{\mathbf{x}})\frac{1}{E^2}|\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^3 = \Big(\frac{\overline{E}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{vv} - 2\frac{\overline{F}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{uv} + \frac{\overline{G}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{uu}\Big) \cdot \frac{\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v}{E} \ . \tag{2.11}$$

Wir entwickeln nun

$$\begin{aligned} H(\overline{\mathbf{x}}) &= H(\mathbf{x} + \zeta\mathbf{X}) \\ &= H(\mathbf{x}) + \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}H(\mathbf{x} + t\zeta\mathbf{X})dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= H(\mathbf{x}) + \int_0^1 \zeta \nabla H(\mathbf{x} + t\zeta \mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} dt \\
&= H(\mathbf{x}) + \zeta \nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X} + \zeta \int_0^1 \Big(\nabla H(\mathbf{x} + t\zeta\mathbf{X}) - \nabla H(\mathbf{x}) \Big) \cdot \mathbf{X} dt \\
&= H(\mathbf{x}) + \zeta \nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X} + \dots . \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Wegen (2.10) finden wir nun ein ε_2 mit $0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1$, so dass

$$\frac{1}{E^2} |\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^2 \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

gilt für alle ζ mit $||\zeta||^{\Omega}_{2+\alpha} < \varepsilon_2$. Für ζ mit dieser Bedingung ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{E^2} |\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^3 &= E(\frac{1}{E^2} |\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= E(1 - 4H\zeta + \dots)^{\frac{3}{2}} \\
&= E\psi(-4H\zeta + \dots) .
\end{aligned}
$$

Hierbei setzen wir $\psi(t) := (t+1)^{\frac{3}{2}}$, $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und entwickeln ψ mit Taylorreihenentwicklung

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= \psi(0) + t\psi'(0) + \frac{1}{2} t^2 \psi''(\lambda t) \\
&= 1 + \frac{3}{2} t + \frac{3}{8} (1 + \lambda t)^{-\frac{1}{2}} t^2 , \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

welches für ein $\lambda = \lambda(t) \in (0, 1)$ gilt. Wir folgern daraus

$$\frac{1}{E^2} |\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^3 = E(1 + \frac{3}{2}(-4H\zeta + \dots) + \dots) = E - 6EH\zeta + \dots . \qquad (2.14)$$

Indem wir dies mit (2.12) kombinieren, folgern wir

$$
\begin{aligned}
2H(\overline{\mathbf{x}}) \frac{1}{E^2} |\overline{\mathbf{x}}_u \wedge \overline{\mathbf{x}}_v|^3 &= 2(H(\mathbf{x}) + (\nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X})\zeta + \dots)(E - 6E\zeta H + \dots) \\
&= 2E\Big(H(\mathbf{x}) - 6H(\mathbf{x})^2 \zeta + (\nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X})\zeta \Big) + \dots \qquad (2.15) \\
&= 2EH(\mathbf{x}) - 12EH(\mathbf{x})^2 \zeta + 2E(\nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X})\zeta + \dots
\end{aligned}
$$

und erhalten eine Entwicklung der linken Seite von (2.11). Um die rechte Seite von (2.11) entwickeln zu können, berechnen wir zunächst mit Hilfe von (2.8) und (2.9)

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{E}}{E} \overline{\mathbf{x}}_{vv} &= (\mathbf{x}_{vv} + \zeta_{vv}\mathbf{X} + 2\zeta_v \mathbf{X}_v + \zeta \mathbf{X}_{vv} + \dots)(1 - 2\zeta \frac{L}{E} + \dots) \\
&= \mathbf{x}_{vv} + \zeta_{vv}\mathbf{X} + 2\zeta_v \mathbf{X}_v + \zeta \mathbf{X}_{vv} - 2\zeta \frac{L}{E} \mathbf{x}_{vv} + \dots \\
-2\frac{\overline{F}}{E} \overline{\mathbf{x}}_{uv} &= -2(\mathbf{x}_{uv} + \zeta_{uv}\mathbf{X} + \zeta_u \mathbf{X}_v + \zeta_v \mathbf{X}_u + \zeta \mathbf{X}_{uv} + \dots)(-2\zeta \frac{M}{E} + \dots) \\
&= 4\zeta \frac{M}{E} \mathbf{x}_{uv} + \dots \\
\frac{\overline{G}}{E} \overline{\mathbf{x}}_{uu} &= (\mathbf{x}_{uu} + \zeta_{uu}\mathbf{X} + 2\zeta_u \mathbf{X}_u + \zeta \mathbf{X}_{uu} + \dots)(1 - 2\zeta \frac{N}{E} + \dots) \\
&= \mathbf{x}_{uu} + \zeta_{uu}\mathbf{X} + 2\zeta_u \mathbf{X}_u + \zeta \mathbf{X}_{uu} - 2\zeta \frac{N}{E} \mathbf{x}_{uu} + \dots
\end{aligned}
$$

Durch Summation erhalten wir dann

$$\frac{\overline{E}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{vv} - 2\frac{\overline{F}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{uv} + \frac{\overline{G}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{uu} = \tag{2.16}$$
$$\triangle\mathbf{x} + (\triangle\zeta)\mathbf{X} + 2\zeta_u\mathbf{X}_u + 2\zeta_v\mathbf{X}_v + \zeta\triangle\mathbf{X} - 2\zeta\frac{1}{E}(L\mathbf{x}_{vv} - 2M\mathbf{x}_{uv} + N\mathbf{x}_{uu}) + \ldots .$$

Wir bilden das Skalarprodukt dieses Ausdruckes mit $\mathbf{X}$ und berechnen

$$\begin{aligned}
&\Big\{\triangle\mathbf{x} + (\triangle\zeta)\mathbf{X} + 2\zeta_u\mathbf{X}_u + 2\zeta_v\mathbf{X}_v + \zeta\triangle\mathbf{X} - 2\zeta\frac{1}{E}(L\mathbf{x}_{vv} - 2M\mathbf{x}_{uv} + N\mathbf{x}_{uu})\Big\}\cdot\mathbf{X}\\
&= 2H(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)\cdot\mathbf{X} + \triangle\zeta - 2E\zeta(2H^2 - K) - 2\zeta\frac{1}{E}(LN - 2M^2 + LN)\\
&= 2HE + \triangle\zeta - 2E\zeta(2H^2 - K) - 4\zeta E\frac{LN - M^2}{E^2}\\
&= 2HE + \triangle\zeta - 4E\zeta H^2 + 2E\zeta K - 4\zeta EK\\
&= 2HE + \triangle\zeta - 4E\zeta H^2 - 2E\zeta K\ .
\end{aligned}\tag{2.17}$$

Hierbei haben wir für $\triangle\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}$ die in Hilfssatz 1 hergeleitete Darstellung benutzt. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\triangle\mathbf{x}\cdot(-2H\zeta\mathbf{X} - \frac{1}{E}(\zeta_u\mathbf{x}_u + \zeta_v\mathbf{x}_v)) &= (2H)(\mathbf{x}_u\wedge\mathbf{x}_v)\cdot(-2H\zeta\mathbf{X} - \frac{1}{E}(\zeta_u\mathbf{x}_u + \zeta_v\mathbf{x}_v))\\
&= -4H^2\zeta E\ .
\end{aligned}\tag{2.18}$$

Wir kombinieren die Formeln (2.16), (2.17) und (2.18) und erhalten

$$\begin{aligned}
&\Big\{\frac{\overline{E}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{vv} - 2\frac{\overline{F}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{uv} + \frac{\overline{G}}{E}\overline{\mathbf{x}}_{uu}\Big\}\cdot\frac{\overline{\mathbf{x}}_u\wedge\overline{\mathbf{x}}_v}{E}\\
&= \Big\{\triangle\mathbf{x} + (\triangle\zeta)\mathbf{X} + 2\zeta_u\mathbf{X}_u + 2\zeta_v\mathbf{X}_v + \zeta\triangle\mathbf{X} - 2\zeta\frac{1}{E}(L\mathbf{x}_{vv} - 2M\mathbf{x}_{uv} + N\mathbf{x}_{uu}) + \ldots\Big\}\\
&\quad\cdot\Big\{\mathbf{X} - 2H\zeta\mathbf{X} - \frac{1}{E}(\zeta_u\mathbf{x}_u + \zeta_v\mathbf{x}_v) + \ldots\Big\}\\
&= \Big\{\triangle\mathbf{x} + (\triangle\zeta)\mathbf{X} + 2\zeta_u\mathbf{X}_u + 2\zeta_v\mathbf{X}_v + \zeta\triangle\mathbf{X} - 2\zeta\frac{1}{E}(L\mathbf{x}_{vv} - 2M\mathbf{x}_{uv} + N\mathbf{x}_{uu})\Big\}\cdot\mathbf{X}\\
&\quad+\triangle\mathbf{x}\cdot(-2H\zeta\mathbf{X} - \frac{1}{E}(\zeta_u\mathbf{x}_u + \zeta_v\mathbf{x}_v)) + \ldots\\
&= 2HE + \triangle\zeta - 4E\zeta H^2 - 2E\zeta K - 4H^2\zeta E + \ldots\\
&= 2HE + \triangle\zeta - 8EH^2\zeta - 2EK\zeta + \ldots .
\end{aligned}\tag{2.19}$$

Wegen (2.11) sowie (2.15) muss obiger Ausdruck gleich der rechten Seite aus (2.15) sein, also ergibt sich

$$2HE + \triangle\zeta - 8EH^2\zeta - 2EK\zeta + \ldots = 2EH - 12EH^2\zeta + 2E(\nabla H\cdot\mathbf{X})\zeta + \ldots ,$$

woraus wir die Differentialgleichung

$$\mathcal{L}\zeta := \triangle\zeta + 2E(2H^2 - K - \nabla H\cdot\mathbf{X})\zeta = \Phi(\zeta) \tag{2.20}$$

ableiten. Hierbei ist $\mathcal{L}$ ein linearer, elliptischer Differentialoperator, welchen wir als den Schwarzschen Operator bezeichnen. Die superlinearen Terme '...' haben wir zur rechten Seite $\Phi(\zeta)$ zusammengefasst. Es ist hierbei

$$\Phi(\zeta) : C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega})$$

richtig.

Definition 1 : Es sei $u = u(x_1, ..., x_n) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ gegeben. Dann erklären wir ihre $C^{2+\alpha}$-Norm durch

$$\begin{aligned} ||u||_{2+\alpha}^{\Omega} &:= \sup_{x\in\Omega}|u(x)| + \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x)| + \sup_{x\in\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}(x)| \\ &\quad + \sup_{\substack{x,x'\in\Omega\\ x\neq x'}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{|u_{x_ix_j}(x)-u_{x_ix_j}(x')|}{|x-x'|^{\alpha}} \end{aligned}$$

Hilfssatz 2 : *Gegeben sei die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H : \mathcal{O} \to \mathbb{R} \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$. Auf der konvexen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei eine Fläche $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to \mathcal{O} \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$ in konformen Parametern der mittleren Krümmung H gegeben. Für ein $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $||\zeta||_{2+\alpha}^{\Omega} < \varepsilon$ ist die normalvariierte Fläche $\overline{\mathbf{x}}(u,v) := \mathbf{x}(u,v) + \zeta(u,v)\mathbf{X}(u,v) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ist genau dann eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H, falls ζ der nichtlinearen, elliptischen Differentialgleichung*

$$\triangle\zeta + 2E(2H^2 - K - \nabla H\cdot\mathbf{X})\zeta = \Phi(\zeta) \quad \mathit{in}\,\Omega$$

genügt. Die rechte Seite Φ unterliegt der Kontraktionsbedingung

$$\begin{aligned} &||\Phi(\zeta)-\Phi(\eta)||_{\alpha}^{\Omega} \le C(\varrho)||\zeta-\eta||_{2+\alpha}^{\Omega} \\ &\text{für alle } ||\zeta||_{2+\alpha}^{\Omega} \le \varrho\,,\ ||\eta||_{2+\alpha}^{\Omega} \le \varrho\,,\ \varrho \le \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Hierbei ist $\varepsilon > 0$ eine Konstante und $C(\varrho) > 0$ erfüllt

$$\lim_{\varrho\to 0} C(\varrho) = 0\,.$$

Beweis:
Die Differentialgleichung haben wir bereits durch die obigen Überlegungen bewiesen. Wir müssen noch die Kontraktionsbedingung (2.21) nachweisen. Hierzu bemerken wir, dass sich Φ als Summe von endlich vielen Termen der Form

$$a(u,v)D\zeta(u,v)$$

darstellen lässt. Dabei ist $D\zeta$ gleich einem der Terme $\zeta, \zeta_u, \zeta_v, \zeta_{uu}, \zeta_{uv}$ oder ζ_{vv}. Weiterhin hängt $a \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ zwar von $\zeta, \zeta_u, \zeta_v, \zeta_{uu}, \zeta_{uv}$ oder ζ_{vv} ab, es gilt jedoch

$$||a(\zeta)-a(\eta)||_{\alpha}^{\Omega} \le L||\zeta-\eta||_{2+\alpha}^{\Omega} \quad \text{für } \zeta,\eta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ mit } ||\zeta||_{2+\alpha}^{\Omega}, ||\eta||_{2+\alpha}^{\Omega} < \varepsilon\,.$$

sowie

$$||a(\zeta)||_{\alpha}^{\Omega} \le C(||\zeta||_{2+\alpha}^{\Omega})$$

mit einer Konstanten $L > 0$ sowie $C = C(\varrho)$, welche $C(\varrho) \to 0$ für $\varrho \to 0$ erfüllt. Damit können wir für $\zeta, \eta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ folgende Abschätzung angeben

$$\begin{aligned} ||a(\zeta)D\zeta - a(\eta)D\eta||_{\alpha}^{\Omega} &\le ||a(\zeta)D\zeta - a(\eta)D\zeta||_{\alpha}^{\Omega} + ||a(\eta)D\zeta - a(\eta)D\eta||_{\alpha}^{\Omega} \\ &\le ||a(\zeta)-a(\eta)||_{\alpha}^{\Omega}||D\zeta||_{\alpha}^{\Omega} + ||a(\eta)||_{\alpha}^{\Omega}||D\zeta - D\eta||_{\alpha}^{\Omega} \\ &\le L||\zeta-\eta||_{2+\alpha}^{\Omega}||\zeta||_{2+\alpha}^{\Omega} + C(||\eta||_{2+\alpha}^{\Omega})||\zeta-\eta||_{2+\alpha}^{\Omega}\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten so die gewünschte Kontraktionsbedingung. q.e.d.

Wir wollen nun die Differentialgleichung (2.20) unter Vorgabe von Dirichlet-Randwerten lösen. Hierzu benötigen wir die Schaudertheorie für die Lösbarkeit elliptischer Differentialgleichungen, weshalb wir folgende Voraussetzung stellen müssen.

Definition 2 : Wir nennen eine H-Fläche $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ strikt stabil, falls es eine Funktion

$$\xi = \xi(u,v) : \overline{\Omega} \to (0,+\infty) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

gibt, welche der Bedingung

$$\mathcal{L}\xi \leq 0 \quad \text{in } \overline{\Omega}$$

genügt. Hierbei ist $\mathcal{L}$ der in (2.20) erklärte, mit $\mathbf{x}$ assoziierte Schwarzsche Operator.

Satz 1 : *Auf dem Gebiet $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ sei eine strikt stabile Fläche $\mathbf{x} : \overline{\Theta} \to \mathcal{O} \in C^{3+\alpha}(\overline{\Theta})$ der vorgeschriebenen mittleren Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$ gegeben. Weiterhin sei ein zum Einheitskreis B diffeomorphes, konvexes Gebiet $\Omega \subset \Theta$ mit einem Diffeomorphismus $h : \overline{B} \to \overline{\Omega}$ gewählt, so dass die Abschätzung*

$$||h||^B_{2+\alpha} \leq L \quad \textit{und} \quad ||h^{-1}||^\Omega_{2+\alpha} \leq L$$

gelte. Dann gibt es eine Konstante $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \mathbf{x}, L, H) > 0$, so dass das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\zeta = \zeta(u,v) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ &\mathcal{L}\zeta = \Phi(\zeta) \quad \textit{in } \overline{\Omega} \\ &\zeta = \psi \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.22}$$

für alle Funktionen $\psi : \partial\Omega \to \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ mit $||\psi||^{\partial\Omega}_{2+\alpha} < \varepsilon$ eine Lösung ζ besitzt. Für dieses ζ ist $\overline{\mathbf{x}}(u,v) := \mathbf{x}(u,v) + \zeta(u,v)\mathbf{X}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$ eine H-Fläche, welche sich in die Randkurve $\Gamma := \overline{\mathbf{x}}(\partial\Omega) = (\mathbf{x} + \psi\mathbf{X})(\partial\Omega)$ einspannt. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$||\zeta||^\Omega_{2+\alpha} \leq C||\psi||^{\partial\Omega}_{2+\alpha}$$

mit einer Konstanten $C = C(\alpha, \mathbf{x}, L, H) > 0$.

Beweis:
Da $\mathbf{x}$ strikt stabil in Θ ist, gibt es eine Stabilitätsfunktion $\xi : \overline{\Theta} \to (0,+\infty)$, welche den Bedingungen der Definition 2 genügt. Wir zeigen zunächst, dass der Operator $\mathcal{L}$ dem Maximumprinzip unterliegt. Für $\tilde{\zeta} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ berechnen wir dazu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi\tilde{\zeta}) &= \triangle(\xi\tilde{\zeta}) + 2E(2H^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X})\xi\tilde{\zeta} \\ &= (\xi_u\tilde{\zeta} + \xi\tilde{\zeta}_u)_u + (\xi_v\tilde{\zeta} + \xi\tilde{\zeta}_v)_v + 2E(2H^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X})\xi\tilde{\zeta} \\ &= \xi\triangle\tilde{\zeta} + 2\xi_u\tilde{\zeta}_u + 2\xi_v\tilde{\zeta}_v + \Big(\triangle\xi + 2E(2H^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X})\xi\Big)\tilde{\zeta} \\ &= \xi\triangle\tilde{\zeta} + 2\xi_u\tilde{\zeta}_u + 2\xi_v\tilde{\zeta}_v + (\mathcal{L}\xi)\tilde{\zeta} \,. \end{aligned}$$

Erklären wir nun den Operator

$$\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\zeta} := \mathcal{L}(\xi\tilde{\zeta}) = \xi\triangle\tilde{\zeta} + 2\xi_u\tilde{\zeta}_u + 2\xi_v\tilde{\zeta}_v + (\mathcal{L}\xi)\tilde{\zeta} \,,$$

so erkennen wir, dass $\tilde{\mathcal{L}}$ wegen $\mathcal{L}\xi \leq 0$ in $\overline{\Theta}$ dem Maximumprinzip unterliegt. Nach Satz 1, §1, Kap. XII in [8] gibt es nun eine Konstante $M_1 = M_1(\xi)$, so dass die Abschätzung

$$||\tilde{\zeta}||^\Omega_0 \leq ||\tilde{\zeta}||^{\partial\Omega}_0 + M_1||\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\zeta}||^\Omega_0 \quad \text{für alle } \tilde{\zeta} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

richtig ist. Für ein beliebiges $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ setzen wir nun $\tilde{\zeta} := \frac{\zeta}{\xi}$ und berechnen damit

$$\begin{aligned}
||\zeta||_0^\Omega &= ||\xi\tilde{\zeta}||_0^\Omega \leq ||\xi||_0^\Omega ||\tilde{\zeta}||_0^\Omega \\
&\leq ||\xi||_0^\Theta (||\tilde{\zeta}||_0^{\partial\Omega} + M_1 ||\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\zeta}||_0^\Omega) \\
&= ||\xi||_0^\Theta (||\frac{\zeta}{\xi}||_0^{\partial\Omega} + M_1 ||\mathcal{L}(\xi\tilde{\zeta})||_0^\Omega) \\
&\leq ||\xi||_0^\Theta (||\frac{1}{\xi}||_0^\Theta ||\zeta||_0^{\partial\Omega} + M_1 ||\mathcal{L}\zeta||_0^\Omega) \\
&\leq M_2(||\zeta||_0^{\partial\Omega} + ||\mathcal{L}\zeta||_0^\Omega) \, .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Hierbei ist $M_2 = M_2(\xi, M_1)$ eine Konstante. In §7, Satz 2 zeigen wir die folgende Schauderabschätzung

$$||\zeta||_{2+\alpha}^\Omega \leq M_3(||\zeta||_0^\Omega + ||\mathcal{L}\zeta||_\alpha^\Omega + ||\zeta||_{2+\alpha}^{\partial\Omega}) \quad \text{für alle } \zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \, , \tag{2.24}$$

welche mit einer Konstanten $M_3 = M_3(\alpha, \mathbf{x}, \xi, L)$ gilt. Die in dieser Abschätzung auftauchende Norm $||\zeta||_0^\Omega$ können wir nun mit Hilfe von (2.23) gegen die anderen beiden Normen abschätzen und ermitteln so ein $M_4 = M_4(M_1, M_3)$, so dass

$$||\zeta||_{2+\alpha}^\Omega \leq M_4(||\mathcal{L}\zeta||_\alpha^\Omega + ||\zeta||_{2+\alpha}^{\partial\Omega}) \quad \text{für alle } \zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \tag{2.25}$$

gilt. Wegen (2.23) besitzt nun die Gleichung

$$\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \, , \quad \mathcal{L}\zeta = 0 \quad \text{in } \Omega \, , \quad \zeta = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

nur die triviale Lösung $\zeta \equiv 0$. Mit dem Schauderschen Fundamentalsatz (vgl. [9], Kap. XV, §6, Satz 5) können wir daher das Problem

$$\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \, , \quad \mathcal{L}\zeta = f \quad \text{in } \Omega \, , \quad \zeta = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{2.26}$$

für alle rechten Seiten $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und alle Randfunktionen $\psi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ eindeutig lösen. Wählen wir nun eine feste Randverteilung $\psi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ und bezeichnen die Lösung von (2.26) als $\mathcal{L}^{-1}(f) := \zeta$. Für $f, g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ gilt dann

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1}(f) - \mathcal{L}^{-1}(g)) = f - g \quad \text{in } \Omega \, , \quad \mathcal{L}^{-1}(f) - \mathcal{L}^{-1}(g) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \, .$$

Aus (2.25) ergibt sich

$$||\mathcal{L}^{-1}(f) - \mathcal{L}^{-1}(g)||_{2+\alpha}^\Omega \leq M_4 ||f - g||_\alpha^\Omega \, .$$

Nutzen wir weiter die Kontraktionseigenschaft von Φ aus Hilfssatz 2 aus, so folgt

$$\begin{aligned}
||\mathcal{L}^{-1} \circ \Phi(\zeta) - \mathcal{L}^{-1} \circ \Phi(\eta)||_{2+\alpha}^\Omega &\leq M_4 ||\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)||_\alpha^\Omega \\
&\leq C(\varrho) M_4 ||\zeta - \eta||_{2+\alpha}^\Omega
\end{aligned}$$

für alle $\zeta, \eta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $||\zeta||_{2+\alpha}^\Omega, ||\eta||_{2+\alpha}^\Omega \leq \varrho$. Ermitteln wir nun ein $\varrho_0 > 0$ so klein, dass

$$M_4 C(\varrho_0) \leq \frac{1}{2}$$

richtig ist, so gilt für $\varepsilon_0 \leq \varrho_0$

$$||\mathcal{L}^{-1} \circ \Phi(\zeta) - \mathcal{L}^{-1} \circ \Phi(\eta)||_{2+\alpha}^\Omega \leq \frac{1}{2} ||\zeta - \eta||_{2+\alpha}^\Omega \tag{2.27}$$

für alle $\zeta, \eta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $||\zeta||_{2+\alpha}^\Omega \leq \varepsilon_0$, $||\eta||_{2+\alpha}^\Omega \leq \varepsilon_0$.

Setzen wir nun speziell $\eta \equiv 0$ ein, so folgt zunächst $\Phi(\eta) = 0$ und weiter

$$\begin{aligned} &||\mathcal{L}^{-1} \circ \Phi(\zeta) - \mathcal{L}^{-1}(0)||_{2+\alpha}^{\Omega} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0 \\ &\text{für alle } \zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ mit } ||\zeta||_{2+\alpha}^{\Omega} \leq \varepsilon_0 \; . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Nun löst weiterhin $\mathcal{L}^{-1}(0)$ das Randwertproblem

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1}(0)) = 0 \quad \text{in } \Omega \; , \quad \mathcal{L}^{-1}(0) = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega \; .$$

Die Abschätzung (2.25) liefert daher

$$||\mathcal{L}^{-1}(0)||_{2+\alpha}^{\Omega} \leq M_4 ||\psi||_{2+\alpha}^{\partial\Omega} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0 \tag{2.29}$$

für alle Randverteilungen $\psi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ mit $||\psi||_{2+\alpha}^{\partial\Omega} \leq \varepsilon_0 (2M_4)^{-1} =: \varepsilon_1$.
Wir erklären jetzt die abgeschlossene, nichtleere Teilmenge

$$A := \{ f \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \; : \; ||f||_{2+\alpha}^{\Omega} \leq \varepsilon_0 \; , \; f = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega \}$$

des Banachraumes $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Auf dieser ist der Operator

$$\mathcal{L}^{-1} \circ \Phi : A \to C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

erklärt. Dieser ist wegen (2.27) eine stetige Kontraktion. Aus (2.28) und (2.29) ermitteln wir

$$||\mathcal{L}^{-1} \circ \Phi(\zeta)||_{2+\alpha}^{\Omega} \leq ||\mathcal{L}^{-1} \circ \Phi(\zeta) - \mathcal{L}^{-1}(0)||_{2+\alpha}^{\Omega} + ||\mathcal{L}^{-1}(0)||_{2+\alpha}^{\Omega} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \; .$$

Wir schließen daraus, dass $\mathcal{L}^{-1} \circ \Phi : A \to A$ richtig ist. Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz an und erhalten eine eindeutige Lösung $\zeta \in A$, welche

$$\mathcal{L}\zeta = \Phi(\zeta) \quad \text{in } \Omega \; , \quad \zeta = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega \quad \text{sowie} \quad ||\zeta||_{2+\alpha}^{\Omega} \leq \varepsilon_0$$

erfüllt. Dieses ist richtig für alle $\psi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ mit $||\psi||_{2+\alpha}^{\partial\Omega} \leq \varepsilon_1 = (2M_4)^{-1}\varepsilon_0$ und alle $\varepsilon_0 \leq \varrho_0$. Für $||\psi||_{2+\alpha}^{\partial\Omega} = \varepsilon_1$ folgt insbesondere

$$||\zeta||_{2+\alpha}^{\Omega} \leq \varepsilon_0 = 2M_4\varepsilon_1 = 2M_4 ||\psi||_{2+\alpha}^{\partial\Omega} \; . \tag{2.30}$$

Damit sind die Aussagen des Satzes bewiesen. q.e.d.

§3 Maximumprinzipien für H-Flächen

In diesem Paragraphen wollen wir einige Maximumprizipien für H-Flächen zeigen, die wir in der weiteren Arbeit noch benötigen werden. Wir betrachten dazu H-Flächen in konformen Parametern

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) : \overline{\Omega} \to \mathcal{O} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ &\triangle \mathbf{x} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{in } \Omega \\ &|\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 = 0 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \quad \text{in } \Omega \; , \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $H \in C^0(\mathcal{O})$ die vorgeschriebene, mittlere Krümmung sei.

Hilfssatz 1 : *Auf der offenen Menge* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ *sei die vorgeschriebene mittlere Krümmung* $H \in C^0(\mathcal{O})$ *gegeben, welche die Bedingung*

$$\sup_{(x,y,z)\in\mathcal{O}} |H(x,y,z)| \leq h$$

erfülle. Weiterhin sei eine H*-Fläche* $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to \mathcal{O} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *in konformen Parametern gegeben. Schließlich sei ein* $p \in \mathbb{R}^3$ *so gewählt, dass die Funktion*

$$\Phi(u,v) := |\mathbf{x}(u,v) - p|^2 \quad , \ (u,v) \in \overline{\Omega}$$

die Bedingung

$$\Phi(u,v) \leq \frac{1}{h^2}$$

erfülle. Dann ist Φ *subharmonisch und unterliegt somit dem Maximumprinzip.*

Beweis:
Wir differenzieren Φ sowohl zweimal nach u als auch nach v und erhalten

$$\begin{aligned} \Phi_{uu} &= 2((\mathbf{x} - p) \cdot \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) \\ \Phi_{vv} &= 2((\mathbf{x} - p) \cdot \mathbf{x}_{vv} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)\ . \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert zusammen mit der konformen Parametrisierung

$$\begin{aligned} \triangle\Phi &= 2(\triangle\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - p) + |\mathbf{x}_u|^2 + |\mathbf{x}_v|^2) = 2(2H(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x} - p) + 2|\mathbf{x}_u|^2) \\ &\geq 4(|\mathbf{x}_u|^2 - |H||\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v||\mathbf{x} - p|) \\ &= 4(|\mathbf{x}_u|^2 - |H||\mathbf{x}_u|^2\Phi^{1/2}) = 4|\mathbf{x}_u|^2(1 - |H|\Phi^{1/2}) \qquad (3.2) \\ &\geq 4|\mathbf{x}_u|^2(1 - h\frac{1}{h}) \geq 0 \end{aligned}$$

Wir folgern, dass $\triangle\Phi \geq 0$ in Ω gilt. Somit ist Φ wie behauptet subharmonisch und das Maximumprinzip für solche Funktionen (vgl. [6], Kap. XI, §2, Satz 7) ist anwendbar. q.e.d.

Für $h > 0$ erklären nun den offenen Zylinder

$$Z_h := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{h^2}\}\ .$$

Wir können nun für H-Flächen $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to Z_h$ die z-Komponente durch die Randwerte von $\mathbf{x}$ abschätzen.

Hilfssatz 2 : *Zu* $h > 0$ *sei die* H*-Fläche* $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : \overline{\Omega} \to Z_h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *in konformen Parametern auf dem zusammenhängenden Gebiet* Ω *gegeben. Die mittlere Krümmung* $H \in C^0(Z_h)$ *erfülle die Bedingung*

$$\sup_{(x,y,z)\in Z_h} |H(x,y,z)| \leq h\ .$$

Zu $r \geq 0$ *erklären wir die Mengen*

$$D_r := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-t)^2 < \frac{1}{h^2} \quad \textit{für ein } t \in [-r,r]\Big\} \subset Z_h\ .$$

Für ein $r \geq 0$ *erfülle die Randkurve von* $\mathbf{x}$ *die Inklusion* $\mathbf{x}(\partial\Omega) \subset D_r$*. Dann gilt* $\mathbf{x}(\overline{\Omega}) \subset D_r$ *.*

Beweis:
Wir erklären zunächst den oberen Rand S_r von D_r durch

$$S_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - r)^2 = \frac{1}{h^2}\ ,\ z > r\}\ .$$

Es gilt dann $S_r \subset \partial D_r$. Weiterhin ist S_r innerhalb des Zylinders Z_h eine abgeschlossene Menge.
Nehmen wir nun an, die Aussage des Satzes sei falsch. Dann können wir ohne Einschränkung ein $R \geq r$ und ein $(u_0, v_0) \in \Omega$ finden, für welche

$$\mathbf{x}(\overline{\Omega}) \subset \overline{D}_R \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(u_0, v_0) \in S_R \tag{3.3}$$

gilt. Insbesondere folgt $z(u_0, v_0) > R$. Es gibt dann aus Stetigkeitsgründen eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von (u_0, v_0) mit $z(u, v) > R$ für alle $(u, v) \in U$. Zusammen mit (3.3) folgt

$$\Phi(u, v) := x(u, v)^2 + y(u, v)^2 + (z(u, v) - R)^2 \leq \frac{1}{h^2} \quad \text{für } (u, v) \in U\ .$$

Die Funktion Φ erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 und ist wegen diesem subharmonisch. Sie nimmt ebenfalls im inneren Punkt $(u_0, v_0) \in U$ ihr Maximum an. Das Maximumprinzip liefert damit $\Phi \equiv \frac{1}{h^2}$ in U, woraus wir $\mathbf{x}(U) \subset S_R$ ableiten. Betrachten wir nun eine Folge

$$\{(u_n, v_n)\}_{n=1,2,\ldots} \subset \Omega \quad \text{mit } (u_n, v_n) \to (u_0, v_0) \in \overline{\Omega} \quad \text{für } n \to +\infty\ ,$$

so gilt die Aussage

$$\mathbf{x}(u_n, v_n) \in S_R \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mathbf{x}(u_0, v_0) \in S_R\ .$$

Ein Fortsetzungsargument längs Wegen liefert dann $\mathbf{x}(\overline{\Omega}) \subset S_R$, dieses stellt jedoch wegen $S_R \cap D_r = \emptyset$ einen Widerspruch zur Voraussetzung $\mathbf{x}(\partial\Omega) \subset D_r$ dar. q.e.d.

Als direkte Folgerung ergibt sich: Für eine Fläche $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, welche den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 genügt, gilt die Abschätzung

$$\inf_{(u,v)\in\partial\Omega} z(u, v) - \frac{1}{h} \leq z(u_0, v_0) \leq \sup_{(u,v)\in\partial\Omega} z(u, v) + \frac{1}{h} \quad \text{für } (u_0, v_0) \in \overline{\Omega}\ .$$

In Analogie zu Hilfssatz 1 zeigen wir nun folgendes Resultat, welches nur die x und y-Komponente einer H-Fläche abschätzt.

Satz 1 : *Es sei* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) : \overline{B} \to \mathcal{O} \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ *eine konform parametrisierte Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung* $H \in C^0(\mathcal{O})$*. Es gelte*

$$\sup_{(x,y,z)\in\mathcal{O}} |H(x, y, z)| \leq h$$

für eine Konstante $h > 0$*. Es sei* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *so gewählt, dass die Funktion*

$$\Phi(u, v) := (x(u, v) - x_0)^2 + (y(u, v) - y_0)^2\ ,\ (u, v) \in \overline{B}$$

der Bedingung

$$\Phi(u, v) \leq \frac{1}{4h^2} \quad \text{in } \overline{B}$$

genüge. Dann ist Φ subharmonisch und unterliegt somit dem Maximumprinzip. Falls die Funktion Φ zusätzlich nicht konstant ist, so gilt

$$\Phi(u,v) < \frac{1}{4h^2}\ ,\ (u,v) \in B$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(u_0,v_0) > 0$$

für jeden Randpunkt $(u_0,v_0) \in \partial B$, in dem Φ ihr Maximum annimmt. Dabei ist ν die äußere Normale an B im Punkt (u_0,v_0).

Beweis:
Wir differenzieren Φ und erhalten

$$\begin{aligned}
\Phi_{uu}(u,v) &= 2x_{uu}(x-x_0) + 2x_u^2 + 2y_{uu}(y-y_0) + 2y_u^2 \\
\Phi_{vv}(u,v) &= 2x_{vv}(x-x_0) + 2x_v^2 + 2y_{vv}(y-y_0) + 2y_v^2
\end{aligned}$$

Durch Addition ergibt sich

$$\begin{aligned}
\triangle\Phi(u,v) &= 2(\triangle x(x-x_0) + \triangle y(y-y_0) + x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2) \\
&= 2(\triangle \mathbf{x} \cdot (x-x_0, y-y_0, 0) + x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2) \\
&= 2(2H(\mathbf{x})(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot (x-x_0, y-y_0, 0) + x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Da nun $\mathbf{x}$ konform parametrisiert ist, gilt im Falle $E = |\mathbf{x}_u|^2 = |\mathbf{x}_v|^2 > 0$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
e_3 &= \frac{1}{E}(e_3 \cdot \mathbf{x}_u)\mathbf{x}_u + \frac{1}{E}(e_3 \cdot \mathbf{x}_v)\mathbf{x}_v + (e_3 \cdot \mathbf{X})\mathbf{X} \\
&= \frac{1}{E} z_u \mathbf{x}_u + \frac{1}{E} z_v \mathbf{x}_v + (e_3 \cdot \mathbf{X})\mathbf{X}\ .
\end{aligned}$$

Durch Skalarprodukt beider Seiten mit e_3 ergibt sich

$$1 = \frac{1}{E} z_u^2 + \frac{1}{E} z_v^2 + (e_3 \cdot \mathbf{X})^2 \geq \frac{1}{E} z_u^2 + \frac{1}{E} z_v^2\ ,$$

woraus wir

$$z_u^2 = z_u^2 + z_v^2 - z_v^2 \leq E - z_v^2 = |\mathbf{x}_v|^2 - z_v^2 = x_v^2 + y_v^2$$

ableiten. Wir bemerken, dass diese Ungleichung auch im Falle $E = 0$ richtig ist. Wir schätzen nun weiter wie folgt ab

$$\begin{aligned}
|2H(\mathbf{x})(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot (x-x_0, y-y_0, 0)| &\leq 2|H(\mathbf{x})||\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v||(x-x_0, y-y_0, 0)| \\
&\leq 2h|\mathbf{x}_u|^2((x-x_0)^2 + (y-y_0^2))^{1/2} \\
&\leq 2h(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)\frac{1}{2h} \\
&\leq x_u^2 + y_u^2 + x_v^2 + y_v^2\ .
\end{aligned}$$

Das Einsetzen dieser Ungleichung in (3.4) liefert

$$\triangle\Phi(u,v) \geq 0 \quad \text{für } (u,v) \in B\ .$$

Φ ist damit subharmonisch und die weiteren angegebenen Eigenschaften folgern wir aus dem Maximumprinzip sowie dem Hopfschen Randpunktlemma (siehe [8], Kap. XII, §1, Satz 2). q.e.d.

Für Flächen, welche Graphen über der x,y-Ebene sind, zeigen wir noch folgendes Maximumprinzip.

Hilfssatz 3 : *Im Zylinder Z_h sei die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^0(Z_h)$ gegeben, welche zusätzlich die Bedingung*

$$H(x,y,z) > 0 \quad \textit{für } z > R \quad \textit{und} \quad H(x,y,z) < 0 \quad \textit{für } z < -R$$

für ein $R > 0$ erfülle. Schließlich sei auf $\Omega \subset B_{\frac{1}{h}}(0)$ ein Graph $\zeta = \zeta(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ der mittleren Krümmung H gegeben, welcher

$$|\zeta(x,y)| \leq R \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

genüge. Dann ist

$$|\zeta(x,y)| \leq R \quad \textit{in } \overline{\Omega}$$

richtig.

Beweis:
Nehmen wir an, die Funktion ζ nehme in $(x_0, y_0) \in \Omega$ ihr globales Maximum an und es gelte $\zeta(x_0, y_0) > R$. Nach Voraussetzung ist dann zunächst $H(x_0, y_0, \zeta(x_0, y_0)) > 0$ richtig. Weiterhin gilt $\nabla\zeta(x_0, y_0) = (\zeta_x, \zeta_y) = 0$ und die Hessematrix von ζ ist im Punkt (x_0, y_0) negativ semidefinit. Insbesondere folgt daraus $\zeta_{xx} \leq 0$ und $\zeta_{yy} \leq 0$. Da ζ als Graph die mittlere Krümmung H besitzt, so genügt sie der Differentialgleichung

$$(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega\,.$$

Werten wir diese Gleichung speziell im Punkt (x_0, y_0) aus, so folgt

$$0 \geq \zeta_{xx}(x_0,y_0) + \zeta_{yy}(x_0,y_0) = 2H(x_0,y_0,\zeta(x_0,y_0)) > 0\,,$$

also ein Widerspruch. Deshalb muß also

$$\zeta(x,y) \leq R \quad \text{in } \overline{\Omega}$$

richtig sein. Analog zeigt man

$$\zeta(x,y) \geq -R \quad \text{in } \overline{\Omega}\,.$$

q.e.d.

§4 Stabilitätsaussagen im Inneren und am Rand

In diesem Paragraphen betrachten wir auf der Einheitskreisscheibe $B = B_1(0,0) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < 1\}$ Lösungen der H-Flächengleichung in konformen Parametern:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) : \overline{B} \to \mathcal{O} \in C^{3+\alpha}(\overline{B}) \\
&\triangle\mathbf{x} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{in } B \\
&|\mathbf{x}_u|^2 = |\mathbf{x}_v|^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0 \quad \text{in } \overline{B}
\end{aligned}$$

zu einem $H \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$. Als Randkurve von $\mathbf{x}$ erkären wir

$$\Gamma := \mathbf{x}(\partial B) \subset \mathbb{R}^3\,.$$

Wir sagen dann auch, dass sich die Fläche $\mathbf{x}$ in die Randkurve Γ einspannt. In §2 Satz 1 haben wir gesehen, dass es möglich ist, zu dieser H-Fläche neue H-Flächen zu anderen Randkurven mit Hilfe des Ansatzes der Variation in Richtung der Normale $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \zeta\mathbf{X}$ zu ermitteln. Eine wichtige Voraussetzung in diesem Satz war die strikte Stabilität der Fläche $\mathbf{x}$. Gemäß Definition 2,§2 ist diese erfüllt, falls es eine Funktion $\xi : \overline{B} \to \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ gibt mit

$$\mathcal{L}\xi \leq 0 \quad \text{in } B \quad \text{sowie} \quad \xi > 0 \quad \text{in } \overline{B} \,. \tag{4.1}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{L}$ den Schwarzschen Operator für $\mathbf{x}$ erklärt als

$$\mathcal{L}\zeta := \triangle\zeta + 2E(2H(\mathbf{x})^2 - K - \nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X})\zeta \,,$$

wobei $E = |\mathbf{x}_u|^2$ und K die Gauss'sche Krümmung der Fläche sind. Die strikte Stabilität ist insbesondere dann erfüllt, falls

$$2H^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X} \leq 0 \quad \text{in } \overline{B} \tag{4.2}$$

gilt. Die Funktion $\xi \equiv 1$ hat dann die Eigenschaften (4.1). Jedoch ist Bedingung (4.2) im allgemeinen nicht erfüllt. Benutzen wir die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2, so können wir die Gauss'sche sowie mittlere Krümmung berechnen durch

$$K = \kappa_1\kappa_2 \,, \; H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 2H^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X} &= \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2) - \kappa_1\kappa_2 - \nabla H \cdot \mathbf{X} \\ &= \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - \nabla H \cdot \mathbf{X} \end{aligned}$$

Bedingung (4.2) ist also beispielsweise im Falle $H \equiv \mathit{const} \neq 0$ verletzt. Um an eine besser geeignete Stabilitätsfunktion ξ zu gelangen, betrachten wir das Ergebnis des Hilfssatzes 1 aus §2. Falls die Fläche $\mathbf{x}$ verzweigungspunktfrei ist, so genügt ihre Normale $\mathbf{X} \in C^{2+\alpha}(B)$ der Differentialgleichung

$$\triangle\mathbf{X} + 2E(2H(\mathbf{x})^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X})\mathbf{X} = -2E\nabla H \quad \text{in } B \,. \tag{4.3}$$

Wir stellen nun folgende Bedingung an die mittlere Krümmung.

Voraussetzung (H1): Die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$ erfülle

$$\nabla H(x,y,z) \cdot e_3 = \frac{\partial}{\partial z} H(x,y,z) \geq 0 \quad \text{für } (x,y,z) \in \mathcal{O} \,. \tag{4.4}$$

Hierbei haben wir den Vektor $e_3 = (0,0,1)$ gesetzt.

Wir bemerken, dass unter Voraussetzung (H1) die Eindeutigkeit von Lösungen des Dirichletproblemes der H-Flächengleichung in nichtparametrischer Form gewährleistet ist, was wir z.B. [8], Kap. XII, §2 entnehmen können.

Multiplizieren wir nun (4.3) skalar mit e_3, so folgt unter Beachtung von (H1)

$$\triangle(\mathbf{X} \cdot e_3) + 2E(2H(\mathbf{x})^2 - K - \nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X})(\mathbf{X} \cdot e_3) = -2E(\nabla H \cdot e_3) \leq 0 \quad \text{in } B \,.$$

Wir erhalten mit der Funktion $\xi(u,v) := \mathbf{X}(u,v) \cdot e_3$, $(u,v) \in \overline{B}$ eine gute Wahl der Stabilitätsfunktion. Diese genügt sofort der Bedingung

$$\mathcal{L}\xi = \triangle\xi + 2E(2H^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X})\xi \leq 0 \quad \text{in } B \,. \tag{4.5}$$

Wir müssen nun noch weitere Voraussetzungen an die Fläche $\mathbf{x}$ fordern, um die Bedingung $\xi > 0$ in $\overline{B}$ zu erfüllen. Wir werden dazu getrennt den Fall $\xi > 0$ in B und den Fall $\xi > 0$ auf ∂B betrachten.

Mit dem folgenden Hilfssatz kann aus $\xi(u_0, v_0) > 0$ für ein $(u_0, v_0) \in B$ die Bedingung $\xi > 0$ in B abgeleitet werden.

Hilfssatz 1 : *Zur vorgeschriebenen mittleren Krümmung H, welche Voraussetzung (H1) erfülle, sei eine reguläre H-Fläche $\mathbf{x} \in C^{3+\alpha}(B)$ gegeben. Die Funktion $\xi(u,v) := \mathbf{X}(u,v) \cdot e_3$, $(u,v) \in B$ erfülle die Bedingungen*

$$\xi(u,v) \geq 0 \quad \textit{für } (u,v) \in B \quad \textit{und} \quad \xi(u_0,v_0) = 0 \quad \textit{für ein } (u_0,v_0) \in B \; .$$

Dann gilt $\xi \equiv 0$ in B.

Beweis:
Aus (4.5) leiten wir zunächst die folgende Differentialungleichung

$$\triangle\xi(u,v) + q(u,v)\xi(u,v) \leq 0 \quad \text{für } (u,v) \in B \tag{4.6}$$

ab. Hierbei ist $q = 2E(2H^2 - K - \nabla H \cdot \mathbf{X}) \in C^0(B)$.
Es sei $w_0 = (u_0, v_0) \in B$ gewählt mit $\xi(w_0) = 0$. Wir wählen nun $R_0 > 0$ so klein, dass $B_{R_0}(w_0) \subset\subset B$ gilt. Dann gilt wegen der Poissonschen Integralformel für $0 < R < R_0$

$$0 = \xi(w_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|w-w_0|=R} \xi(w)d\sigma(w) - \frac{1}{2\pi} \int\int\limits_{|w-w_0|\leq R} \log\Big(\frac{R}{|w-w_0|}\Big)\triangle\xi(w)dudv \; . \tag{4.7}$$

Da q stetig in B ist, finden wir ein $L > 0$, so dass

$$q(w) \geq -L \quad \text{für } w \in B_{R_0}(0)$$

erfüllt ist. Es folgt mit (4.6)

$$\triangle\xi(w) \leq L\xi(w) \; ,$$

und wir berechnen mit Hilfe von (4.7)

$$0 \geq \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|w-w_0|=R} \xi(w)d\sigma(w) - \frac{L}{2\pi} \int\int\limits_{|w-w_0|\leq R} \log\Big(\frac{R}{|w-w_0|}\Big)\xi(w)dudv \; .$$

Wir setzen nun

$$\psi(R) := \frac{1}{R} \int\limits_{|w-w_0|=R} \xi(w)d\sigma(w) = \int\limits_0^{2\pi} \xi(w_0 + Re^{i\varphi})d\varphi$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \psi(R) \quad &\leq \quad L \int\int\limits_{|w-w_0|\leq R} \log\Big(\frac{R}{|w-w_0|}\Big)\xi(w)dudv = L \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} r \log\Big(\frac{R}{r}\Big)\xi(w_0 + re^{i\varphi})d\varphi dr \\ &= \quad L \int\limits_0^R r \log\Big(\frac{R}{r}\Big) \int\limits_0^{2\pi} \xi(w_0 + re^{i\varphi})d\varphi dr = L \int\limits_0^R r \log\Big(\frac{R}{r}\Big)\psi(r)dr \; . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Wir erklären hier

$$f(r) := r \log\Big(\frac{R}{r}\Big) = r\log R - r\log r \quad \text{für } r > 0 \; , \; f(0) := 0$$

und weisen die Beschränktheit von f in $[0, R]$ nach. Zunächst ist $f \in C^0([0,R]) \cap C^1((0,R])$ richtig. Wir berechnen nun

$$f'(r) = \log R - \log r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{R}{e}$$

und damit folgt

$$f(r) = r\log R - r\log r \le f\Big(\frac{R}{e}\Big) = \frac{R}{e} \le \frac{R_0}{e}\ .$$

Zusammen mit (4.8) ergibt sich

$$\psi(R) \le L\int\limits_0^R \frac{R_0}{e}\psi(r)dr = \frac{LR_0}{e}\int\limits_0^R \psi(r)dr\ ,$$

und wir schließen mit Gronwalls Ungleichung, dass

$$\psi(R) = 0 \quad \text{für } 0 < R < R_0$$

richtig ist. Da nun

$$\psi(R) = \frac{1}{R}\int\limits_{|w-w_0|=R} \xi(w)d\sigma(w) = 0$$

und nach Voraussetzung $\xi(w) \ge 0$ gilt, folgern wir

$$\xi(w) = 0 \quad \text{für alle } |w-w_0| = R \text{ und } 0 < R < R_0.$$

Damit ergibt sich, dass jeder Punkt $w_0 \in B$ mit $\xi(w_0) = 0$ eine offene Umgebung $U = U(w_0) \subset B$ besitzt mit $f(U) = \{0\}$. Mit einem Fortsetzungsargument längs Wegen ergibt sich dann die Behauptung $\xi(w) \equiv 0$. q.e.d.

Bemerkung: Die Aussage von obigem Hilfssatz bleibt auch richtig, falls man B durch ein beschränktes, offenes und zusammenhängendes Gebiet Ω ersetzt.

Wir müssen wir nun noch die Bedingung $\xi = \mathbf{X}\cdot e_3 > 0$ auf ∂B sowie $\mathbf{x}$ verzweigungspunktfrei in B sichern.
Wir setzen dazu $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ für $(u,v) \in \overline{B}$ und berechnen

$$\begin{aligned} E\xi &= (E\mathbf{X})\cdot e_3 = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)\cdot(0,0,1) = (\mathbf{x}_u)\cdot(\mathbf{x}_v \wedge (0,0,1)) \\ &= (x_u, y_u, z_u)\cdot(y_v, -x_v, 0) = x_u y_v - x_v y_u = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J_f(u,v) \end{aligned} \tag{4.9}$$

mit der Funktion $f(u,v) := (x(u,v), y(u,v))$. Damit gilt in allen regulären Punkten (u,v) die folgende Äquivalenz

$$J_f(u,v) > 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{X}(u,v)\cdot e_3 > 0\ .$$

Der folgende Satz untersucht die Verzweigungspunkte einer H-Fläche.

Hilfssatz 2 : *Zu $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ sei eine H-Fläche $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : \overline{\Omega} \to \mathcal{O} \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ in konformen Parametern gegeben. Die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^0(\mathcal{O})$ erfülle die Bedingung*

$$\sup_{(x,y,z)\in\mathcal{O}} |H(x,y,z)| \le h$$

mit einer Konstanten $h > 0$. Die Funktion $f = f(u,v) := x(u,v) + iy(u,v)$ genüge den Bedingungen

$$\begin{aligned} &J_f(u,v) = x_u y_v - x_v y_u \ge 0 \quad \textit{in}\ \Omega \quad \textit{sowie} \\ &|f_w(w)| \le M \quad \textit{für alle}\ w = u + iv \in \Omega\ . \end{aligned}$$

Dann ist die Abschätzung

$$|f_{w\overline{w}}(w)| \le 2hM|f_w(w)| \quad \textit{für } w \in \Omega$$

erfüllt. Die Funktion f_w ist somit pseudoholomorph und lässt sich darstellen als

$$f_w(w) = e^{\Psi(w)}\varphi(w) \quad \textit{für } w \in \Omega\ ,$$

wobei $\Psi \in C^0(\overline{\Omega})$ und $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph gilt. Weiterhin gilt für alle $w_0 \in \Omega$ die Äquivalenz

$$f_w(w_0) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{x}_u(w_0) \wedge \mathbf{x}_v(w_0) = 0\ .$$

Beweis:
Zunächst schätzen wir $|f_w|^2$ ab.

$$\begin{aligned} |f_w|^2 &= |\frac{1}{2}(f_u - if_v)|^2 = \frac{1}{4}|x_u + iy_u - ix_v + y_v|^2 \\ &= \frac{1}{4}\{(x_u + y_v)^2 + (y_u - x_v)^2\} = \frac{1}{4}(x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 + 2x_u y_v - 2x_v y_u) \\ &= \frac{1}{4}(x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 + 2J_f)\ . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Insbesondere gilt also

$$|f_w|^2 \ge \frac{1}{2}J_f\ . \tag{4.11}$$

Wir verwenden die Differentialgleichung $\triangle\mathbf{x} = 2H\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$, um $|f_{w\overline{w}}|^2$ wie folgt abzuschätzen

$$\begin{aligned} |f_{w\overline{w}}|^2 &= |\frac{1}{4}(f_u - if_v)_u + \frac{1}{4}i(f_u - if_v)_v|^2 = \frac{1}{16}|f_{uu} - if_{uv} + if_{uv} + f_{vv}|^2 \\ &= \frac{1}{16}|x_{uu} + x_{vv} + iy_{uu} + iy_{vv}|^2 = \frac{1}{16}\{(x_{uu} + x_{vv})^2 + (y_{uu} + y_{vv})^2\} \\ &= \frac{1}{16}\{(\triangle\mathbf{x} \cdot e_1)^2 + (\triangle\mathbf{x} \cdot e_2)^2\} \\ &= \frac{1}{16}\{(2H(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot e_1)^2 + (2H(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot e_2)^2\} \\ &= \frac{1}{4}H^2\{(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \cdot e_1)^2 + (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \cdot e_2)^2\}\ . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Hierbei haben wir e_1, e_2, e_3 die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$ gesetzt. Es gilt nun die Gleichung

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \cdot e_1)^2 + (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \cdot e_2)^2 + (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \cdot e_3)^2\ .$$

Weiterhin gilt wegen der konformen Parametrisierung von $\mathbf{x}$ die Ungleichung $z_u^2 \le x_v^2 + y_v^2$. Wir nutzen dies aus um aus (4.12) weiter zu folgern

$$\begin{aligned} |f_{w\overline{w}}|^2 &= \frac{1}{4}H^2\{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 - (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \cdot e_3)^2\} \\ &= \frac{1}{4}H^2\{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)^2 - (x_u y_v - x_v y_u)^2\} \\ &\le \frac{1}{4}h^2\{(x_u^2 + y_u^2 + x_v^2 + y_v^2)^2 - J_f^2\} \\ &\le \{\frac{1}{2}h(x_u^2 + y_u^2 + x_v^2 + y_v^2)\}^2\ . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Aus den Berechnungen (4.10) und (4.13) ergibt sich

$$\begin{aligned} |f_{w\overline{w}}| &\leq \frac{1}{2}h(x_u^2+x_v^2+y_u^2+y_v^2) \\ &\leq 2h\frac{1}{4}(x_u^2+x_v^2+y_u^2+y_v^2+2J_f) \\ &= 2h|f_w|^2 = 2h|f_w||f_w| \leq 2hM|f_w|\ , \end{aligned} \tag{4.14}$$

wobei wir die Voraussetzung $J_f \geq 0$ verwendet haben. Die Funktion f_w genügt also der Abschätzung $|f_{w\overline{w}}| \leq 2hM|f_w|$. Sie ist damit pseudoholomorph und nach dem Ähnlichkeitsprinzip von Bers und Vekua (vgl. [6], Kap. 10, §5, Satz 1) gibt es eine stetige Funktion $\Psi \in C^0(\overline{\Omega})$ und eine holomorphe Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$, so dass die Darstellung

$$f_w(w) = e^{\Psi(w)}\varphi(w) \quad , \ z \in B$$

richtig ist.
Es sei nun ein $w_0 \in \Omega$ gewählt. Falls $f_w(w_0) = 0$ richtig ist, so gilt wegen (4.10) $x_u = x_v = y_u = y_v = 0$ und es folgt $\mathbf{x}_u(w_0) \wedge \mathbf{x}_v(w_0) = 0$. Falls andererseits $\mathbf{x}_u(w_0) \wedge \mathbf{x}_v(w_0) = 0$ ist, so folgt wegen der konformen Parametrisierung $\mathbf{x}_u(w_0) = 0$ und $\mathbf{x}_v(w_0) = 0$, woraus wir ebenfalls $f_w(w_0) = 0$ ableiten. Somit gilt die im Satz behauptete Äquivalenz. q.e.d.

Wir wenden diesen Hilfssatz an um das folgende Resultat zu zeigen.

Hilfssatz 3 : *Für ein $R > 0$ erklären wir zunächst $B_R := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < R^2\}$. Gegeben sei die Folge $H^n \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$ von vorgeschriebenen mittleren Krümmungen mit*

$$\sup_{(x,y,z)\in\mathcal{O}} |H^n(x,y,z)| \leq h \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}$$

sowie eine Folge $\mathbf{x}^n : \overline{B}_R \to \mathcal{O} \in C^2(\overline{B}_R)$ von H^n-Flächen in konformen Parametern, für welche die Abbildungen $f^n(u,v) := x^n(u,v) + iy^n(u,v)$ die Voraussetzung

$$J_{f^n}(u,v) > 0 \quad \textit{für } (u,v) \in B_R \textit{ und } n \in \mathbb{N} \tag{4.15}$$

erfüllen. Weiterhin gebe es zur vorgeschriebenen mittleren Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(\mathcal{O})$, welche (H1) erfüllt, eine H-Fläche $\mathbf{x} : \overline{B}_R \to \mathcal{O} \in C^2(\overline{B}_R)$, für welche die Konvergenz

$$\mathbf{x}^n \ \to \ \mathbf{x} \quad \textit{in } C^2(\overline{B}_R) \quad \textit{für } n \to \infty$$

richtig ist. Schließlich erfülle $f(u,v) := x(u,v)+iy(u,v)$ die Bedingung $J_f(0,0) > 0$. Dann gilt

$$J_f(u,v) > 0 \quad \textit{für } (u,v) \in B_R\ .$$

Beweis:
Aus der Konvergenz der $\mathbf{x}_n$ leiten wir zunächst die Konvergenz

$$f_n \ \to \ f \quad \text{in } C^2(\overline{B}_R) \quad \text{für } n \to \infty \tag{4.16}$$

ab. Aus Voraussetzung (4.15) leiten wir daher

$$J_f(u,v) \geq 0 \quad \text{in } B_R \tag{4.17}$$

ab. Wegen $f \in C^2(\overline{B}_R)$ können wir ein $M < +\infty$ finden wir mit

$$|f_w(u,v)| \leq \frac{1}{2}M \quad \text{für } (u,v) \in B_R\ .$$

Zusammen mit (4.16) ermitteln wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_w^n(u,v)| \leq M \quad \text{für } (u,v) \in B_R \text{ und } n \geq n_0\ .$$

Wir nehmen ohne Einschränkung $n_0 = 1$ an. Mit Hilfe von Hilfssatz 2 erhalten wir die Abschätzung

$$|f_{w\overline{w}}^n(u,v)| \leq 2hM|f_w^n(u,v)| \quad \text{für } (u,v) \in B_R\ .$$

Aus der Voraussetzung $J_{f^n} > 0$ in B_R leiten wir

$$0 < |f_w^n(u,v)| \leq M \quad \text{für alle } (u,v) \in \overline{B}_R \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

ab, wobei wir (4.11) benutzt haben. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 1, §5, Kap XVII erfüllt. Mit diesem können wir zu jedem $r < R$ ein $C = C(r,R,M,h)$ ermitteln, so dass die Abschätzung

$$|f_w^n(u,v)| \geq C\Big|f_w^n(0,0)\Big|^{\frac{R+r}{R-r}} \quad , \ (u,v) \in B_r \tag{4.18}$$

richtig ist. Lassen wir nun in (4.18) $n \to \infty$ gehen, so folgt

$$|f_w(u,v)| \geq C\Big|f_w(0,0)\Big|^{\frac{R+r}{R-r}} \quad , \ (u,v) \in B_r\ . \tag{4.19}$$

Aus der Voraussetzung $J_f(0,0) > 0$ ergibt sich zusammen mit (4.11) $|f_w(0,0)| > 0$. Setzen wir dies in (4.19) ein, so folgt

$$f_w(u,v) \neq 0 \quad \text{für alle } (u,v) \in B_R\ . \tag{4.20}$$

Mit der im Hilfssatz 2 angegebenen Äquivalenz schließen wir

$$\mathbf{x}_u(u,v) \wedge \mathbf{x}_v(u,v) \neq 0 \quad \text{für } (u,v) \in B_R\ ,$$

die Fläche $\mathbf{x}$ ist also in B_R regulär. Weiterhin gilt wegen (4.17)

$$\mathbf{X}(u,v) \cdot e_3 = \frac{1}{E} J_f(u,v) \geq 0 \quad \text{in } B_R\ .$$

Wir können daher Hilfssatz 1 anwenden, welcher wegen $J_f(0,0) > 0$

$$\frac{1}{E} J_f(u,v) = \mathbf{X}(u,v) \cdot e_3 > 0 \quad \text{für } (u,v) \in B_R$$

liefert. q.e.d.

Um nun auch die Stabilität am Rande zu gewährleisten, müssen wir die folgenden Einschränkungen an die Randkurve voraussetzen.

Definition 1 : Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ eine einfach geschlossene Jordankurve der Klasse C^2 sei, parametrisiert durch die reguläre Parametrisierung

$$(x(t), y(t)) : \mathbb{R} \to \partial\Omega \in C^2(\mathbb{R})\ .$$

Zu einem $k > 0$ nennen wir Ω dann eine k-konvexe Menge, falls für die Krümmung der Randkurve $\kappa(t)$ die Abschätzung

$$|\kappa(t)| = \left|\frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}(t)\right| > k \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

richtig ist und zusätzlich die Inklusion

$$\overline{\Omega} \subset B_{\frac{1}{k}}(0)$$

erfüllt ist.

Bemerkungen:

1.) Da der Betrag der Krümmung einer Kurve invariant gegenüber Umparametrisierung ist, hängt die obige Definition nur von $\partial\Omega$, nicht jedoch von seiner konkret gewählten Parametrisierung ab.

2.) Jedes k-konvexe Gebiet ist ein konvexes Gebiet.

3.) Für ein k-konvexes Gebiet gilt in jedem Randpunkt $(x, y) \in \partial\Omega$ die folgende Stützkreisbedingung: Es gibt eine offene Umgebung U von (x, y) sowie einen Stützkreis $B_r(x_0, y_0)$ vom Radius $r = \frac{1}{k}$ und Mittelpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\Omega \cap U \subset B_r(x_0, y_0) \cap U \quad \text{und} \quad (x, y) \in \partial B_r(x_0, y_0)$$

erfüllt ist.

Definition 2 : Zu $k > 0$ sei das k-konvexe Gebiet Ω gegeben. Weiterhin sei eine Funktion $g : \partial\Omega \to \mathbb{R} \in C^1(\partial\Omega)$ vorgeschrieben. Dann erklären wir eine Randkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\Gamma := \{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \partial\Omega\} .$$

Eine solche Randkurve nennen wir k-Randkurve, das Gebiet Ω nennen wir das Projektionsgebiet von Γ.

Von nun an betrachten wir Flächen $\mathbf{x} : \overline{B} \to Z_{2h}$. Diese Flächen befinden sich also vollständig innerhalb des Zylinders

$$Z_{2h} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{4h^2}\} .$$

Wir beachten dazu, dass der Rand ∂Z_{2h} als Fläche die konstante mittlere Krümmung h besitzt. Der Zylinder Z_{2h} wird uns daher als Stützkörper dienen.

Satz 1 : *Es sei die mittlere Krümmung $H \in C^0(Z_{2h})$ gegeben, welche*

$$\sup_{(x,y,z)\in Z_{2h}} |H(x, y, z)| \leq h$$

mit einer Konstanten $h > 0$ genüge. Weiterhin sei eine $(2h)$-Randkurve Γ mit zugehörigem $(2h)$-konvexen Projektionsgebiet Ω gegeben. Schließlich sei $\mathbf{x} : \overline{B} \to Z_{2h} \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ eine H-Fläche in konformen Parametern zur Randkurve Γ, welche die Bedingung

$$\mathbf{x}(B) \subset Z_\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\} \tag{4.21}$$

erfülle. Dann gilt

$$(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(u, v)) \cdot e_3 \neq 0 \quad \text{für } (u, v) \in \partial B .$$

Die Fläche hat also insbesondere keine Verzweigungspunkte auf ∂B.

Beweis:
1.) Es sei ein $(u_0, v_0) = (\cos\theta, \sin\theta) \in \partial B$ gewählt. Mit Hilfe einer Rotation im Definitionsbereich um den Winkel $-\theta$ können wir uns auf den Fall $(u_0, v_0) = (1, 0)$ zurückziehen. Wir setzen nun $(x_0, y_0) := (x(1, 0), y(1, 0)) \in \partial\Omega$. Da Ω $2h$-konvex ist, gibt es wegen der Bemerkung zu Definition 2 einen Stützkreis vom Radius $R := \frac{1}{2h}$ und Mittelpunkt $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Mit Hilfe einer Translation im Bildbereich um $(-x_1, -y_1)$ können wir ohne Einschränkung $(x_1, y_1) = (0, 0)$ annehmen. Es folgt also

$$\Omega \cap U \subset B_R(0) \cap U \quad \text{und} \quad (x_0, y_0) \in \partial B_R(0) , \tag{4.22}$$

wobei U eine offene Umgebung des Punktes (x_0, y_0) ist.

2.) Mit $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ erklären wir $f(u,v) := (x(u,v), y(u,v))$ für $(u,v) \in \overline{B}$. Da nun $f(1,0) = (x_0, y_0) \in U$ und U offen ist, können wir aus Stetigkeitsgründen ein $0 < \delta < 1$ so klein wählen, dass mit $w_0 := (1-\delta, 0)$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind

$$B_\delta(w_0) \subset B \quad , \quad (1,0) \in \partial B_\delta(w_0) \quad \text{sowie} \quad f(B_\delta(w_0)) \subset U \, .$$

Wegen Voraussetzung (4.21) sowie (4.22) ist dann weiterhin

$$f(B_\delta(w_0)) \subset \Omega \cap U \subset B_R(0) \cap U$$

richtig. Erklären wir die Funktion

$$\Phi(u,v) := |f(u,v)|^2 = x(u,v)^2 + y(u,v)^2 \quad , \ (u,v) \in \overline{B} \, ,$$

so genügt diese den Bedingungen

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &\le R^2 = \frac{1}{4h^2} \quad \text{in } \overline{B}_\delta(w_0) \\
\Phi(u,v) &< R^2 = \frac{1}{4h^2} \quad \text{in } B_\delta(w_0) \\
\Phi(1,0) &= R^2 = \frac{1}{4h^2} \, .
\end{aligned}$$

Das Maximumprinzip aus Satz 1 in §3 liefert

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(1,0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}(1,0) = x(1,0)x_u(1,0) + y(1,0)y_u(1,0) \\
&= x_0 x_u(1,0) + y_0 y_u(1,0) > 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Hierbei ist $\nu = (1,0)$ die äußere Normale an $B_\delta(w_0)$ im Punkt $(1,0)$. Insbesondere folgern wir daraus

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2|_{(1,0)} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2|_{(1,0)} > 0 \, , \tag{4.24}$$

weshalb der Punkt $\mathbf{x}(1,0)$ also kein Verzweigungspunkt der Fläche $\mathbf{x}$ sein kann.

3.) Wir setzen nun $\tilde{\Phi}(\theta) := \Phi(w_0 + \delta e^{i\theta})$ für $\theta \in (-2\pi, 2\pi)$. Dann nimmt $\tilde{\Phi}(\theta)$ in $\theta = 0$ sein Maximum an, und es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\tilde{\Phi}'(0) = \frac{1}{2}\Phi_v(1,0) = x x_v + y y_v|_{(1,0)} = x_0 x_v(1,0) + y_0 y_v(1,0) \qquad (4.25) \\
&= \det \begin{pmatrix} x_0 & -y_v(1,0) \\ y_0 & x_v(1,0) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

4.) Da die Randkurve Γ eine $(2h)$-Randkurve ist, gibt es eine Funktion $g : V \to \mathbb{R} \in C^1(V)$ mit

$$z(\cos\theta, \sin\theta) = g(x(\cos\theta, \sin\theta), y(\cos\theta, \sin\theta)) \quad \text{für } \theta \in (-2\pi, 2\pi) \, .$$

Hierbei ist $V \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung von $\partial\Omega$. Differentiation nach θ und Einsetzen von $\theta = 0$ liefert

$$z_v(1,0) = g_x(x_0, y_0) x_v(1,0) + g_y(x_0, y_0) y_v(1,0) \, .$$

Wir leiten daraus die folgende Implikation ab

$$z_v(1,0) \neq 0 \ \Rightarrow \ x_v(1,0)^2 + y_v(1,0)^2 > 0 \ .$$

Zusammen mit (4.24) schließen wir

$$x_v(1,0)^2 + y_v(1,0)^2 > 0 \ .$$

Damit können wir aus (4.25) ein $\lambda \neq 0$ ermitteln mit

$$\begin{pmatrix} -y_v(1,0) \\ x_v(1,0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

und erhalten unter Nutzung von (4.23)

$$(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v(1,0)) \cdot e_3 = x_u y_v - x_v y_u|_{(1,0)} = -\lambda(x_u(1,0)x_0 + y_u(1,0)y_0) \neq 0 \ ,$$

womit die Aussage des Satzes bewiesen ist. q.e.d.

§5 Kompaktheitseigenschaften

Um das Einführen konformer Parameter auf einer Fläche zu ermöglichen, zeigen wir zunächst folgendes Resultat.

Satz 1 : *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, welches als Rand $\partial\Omega$ eine reguläre reell analytische Jordankurve besitze. Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in \Omega$ und jeder regulären Fläche $\mathbf{x} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ einen Diffeomorphismus*

$$\varphi : \overline{B} \to \overline{\Omega} \in C^{2+\alpha}(\overline{B}) \quad mit \quad \varphi(0,0) = (x_0, y_0) \ ,$$

für welchen die umparametrisierte Fläche $\overline{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ \varphi \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ in konformen Parametern vorliegt.

Beweis:
1.) Wir betrachten zunächst den Fall $\Omega = B$ sowie $(x_0, y_0) = (0,0)$. Es sei also eine reguläre Fläche

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x,y) : \overline{B} \to \mathbb{R}^3 \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$$

gegeben. Aus der Regularität leiten wir zunächst

$$0 < |\mathbf{x}_x \wedge \mathbf{x}_y|^2 = |\mathbf{x}_x|^2 |\mathbf{x}_y|^2 - (\mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_y)^2 \quad \text{in } \overline{B} \tag{5.1}$$

ab. Wir betrachten die folgende, mit der Fläche $\mathbf{x}$ assoziierte Riemannsche Metrik

$$ds^2 = a(x,y)dx^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dy^2 \tag{5.2}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{array}{rcl} a(x,y) & := & |\mathbf{x}_x(x,y)|^2 \\ b(x,y) & := & \mathbf{x}_x(x,y) \cdot \mathbf{x}_y(x,y) \quad \text{für } (x,y) \in \overline{B} \\ c(x,y) & := & |\mathbf{x}_y(x,y)|^2 \ . \end{array}$$

Wir bemerken, dass $a, b, c \in C^{1+\alpha}(\overline{B})$ erfüllt ist. Wegen (5.1) ist diese Metrik in folgendem Sinne elliptisch

$$a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y) > 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in \overline{B} \ .$$

Wir können daher den Uniformisierungssatz (vgl. [9], Kap. XVII, §8, Satz 2) auf die Metrik ds^2 anwenden. Es gibt einen positiv orientierten Diffeomorphismus

$$f = f(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) : \overline{B} \to \overline{B} \in C^{2+\alpha}(\overline{B}) \quad \text{mit} \quad f(0,0) = (0,0) \ ,$$

welcher die Metrik in die isotherme Form

$$ds^2 = \Lambda(u,v)(du^2 + dv^2) \tag{5.3}$$

mit einem $\Lambda(u,v) : \overline{B} \to (0,+\infty) \in C^{1+\alpha}(\overline{B})$ überführt. Setzen wir nun in (5.2) die Darstellungen $dx = x_u du + x_v dv$ sowie $dy = y_u du + y_v dv$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
ds^2 &= a(x_u du + x_v dv)^2 + 2b(x_u du + x_v dv)(y_u du + y_v dv) + c(y_u du + y_v dv)^2 \\
&= a(x_u^2 du^2 + 2x_u x_v du dv + x_v^2 dv^2) \\
&\quad +2b\Big(x_u y_u du^2 + (x_u y_v + x_v y_u) du dv + x_v y_v dv^2\Big) \\
&\quad +c(y_u^2 du^2 + 2y_u y_v du dv + y_v^2 dv^2) \\
&= (a x_u^2 + 2b x_u y_u + c y_u^2) du^2 + (a x_v^2 + 2b x_v y_v + c y_v^2) dv^2 \\
&\quad +2(a x_u x_v + b x_u y_v + b x_v y_u + c y_u y_v) du dv \\
&= \Lambda(u,v)(du^2 + dv^2)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Wir erklären nun die Fläche $\overline{\mathbf{x}}(u,v) := \mathbf{x} \circ f(u,v) = \mathbf{x}(x(u,v), y(u,v))$ für $(u,v) \in \overline{B}$. Ein Koeffizientenvergleich in (5.4) liefert

$$\begin{aligned}
0 &= a x_u x_v + b x_u y_v + b x_v y_u + c y_u y_v \\
&= |\mathbf{x}_x|^2 x_u x_v + (\mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_y) x_u y_v + (\mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_y) x_v y_u + |\mathbf{x}_y|^2 x_v y_v \\
&= (\mathbf{x}_x x_u + \mathbf{x}_y y_u) \cdot (\mathbf{x}_x x_v + \mathbf{x}_y y_v) \\
&= \overline{\mathbf{x}}_u \cdot \overline{\mathbf{x}}_v \ .
\end{aligned}$$

Ein weiterer Koeffizientenvergleich in (5.4) ergibt

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathbf{x}}_u|^2 &= (\mathbf{x}_x x_u + \mathbf{x}_y y_u) \cdot (\mathbf{x}_x x_u + \mathbf{x}_y y_u) \\
&= a x_u^2 + 2b x_u y_u + c y_u^2 \\
&= a x_v^2 + 2b x_v y_v + c y_v^2 \\
&= |\mathbf{x}_x|^2 x_v^2 + 2(\mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_y) x_v y_v + |\mathbf{x}_y|^2 y_v^2 \\
&= (\mathbf{x}_x x_v + \mathbf{x}_y y_v) \cdot (\mathbf{x}_x x_v + \mathbf{x}_y y_v) \\
&= |\overline{\mathbf{x}}_v|^2 \ .
\end{aligned}$$

Somit erfüllt die Fläche $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ f$ beide Konformitätsrelationen. Die Fläche $\overline{\mathbf{x}}$ liegt damit in konformen Parametern vor und f ist der nach Behauptung des Satzes gesuchte Diffeomorphismus.

2.) Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Es sei Ω ein Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ eine einfach geschlossene, reell analytische Jordankurve bilde. Weiterhin sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig gewählt. Mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes (siehe [6], Kap. X, §6) können wir zunächst eine holomorphe, bijektive Abbildung $h : B \to \Omega$ konstruieren. Da nun Ω eine reell analytische Randkurve besitzt, können wir mit Hilfe von [6], Kap. X, §7, Satz 2 das Randverhalten von h auf ∂B kontrollieren. Es lässt sich h als holomorphe, bijektive Abbildung fortsetzen zu $h : \overline{B} \to \overline{\Omega}$. Außerdem entnehmen wir dem Satz, dass

$$|h'(z)|^2 = J_h(z) > 0 \quad \text{für } z \in \overline{B} \tag{5.5}$$

richtig ist. Zu $z_0 := h^{-1}(x_0, y_0) \in B$ betrachten wir nun die Möbiustransformation

$$\sigma = \sigma(z) : \overline{B} \to \overline{B} \quad , \quad \sigma(z) := \frac{z - z_0}{\overline{z}_0 z - 1} \, .$$

Diese ist holomorph, bijektiv und erfüllt weiterhin die Bedingungen

$$\sigma(0) = z_0 \quad \text{sowie} \quad |\sigma'(z)|^2 > 0 \quad \text{für } z \in \overline{B} \, . \tag{5.6}$$

Die Komposition $g(z) := h \circ \sigma(z)$ für $z \in \overline{B}$ ist somit holomorph, bijektiv. Wegen (5.5) und (5.6) erfüllt sie weiterhin

$$g(0) = (x_0, y_0) \quad \text{und} \quad |g'(z)|^2 = J_g(z) > 0 \quad , \; z \in \overline{B} \, . \tag{5.7}$$

Nun sei eine reguläre Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ gewählt. Wir erklären hierzu die Hilfsfläche

$$\tilde{\mathbf{x}} : \overline{B} \to \mathbb{R}^3 \in C^{2+\alpha}(\overline{B}) \quad ; \quad \tilde{\mathbf{x}}(u, v) := \mathbf{x} \circ g(u, v) \quad , \; (u, v) \in \overline{B} \, .$$

Da $\mathbf{x}$ eine reguläre Fläche ist, entnehmen wir (5.7), dass ebenfalls $\tilde{\mathbf{x}}$ regulär ist. Mit Hilfe von 1.) ermitteln wir nun einen $C^{2+\alpha}$-Diffeomorphismus $f : \overline{B} \to \overline{B}$, für welchen die umparametrisierte Fläche $\tilde{\mathbf{x}} \circ f : \overline{B} \to \mathbb{R}^3$ in konformen Parametern ist. Die Abbildung $g \circ f : \overline{B} \to \overline{\Omega}$ ist dann der nach Behauptung des Satzes gesuchte Diffeomorphismus. q.e.d.

Es sei nun zu $h > 0$ ein $2h$-konvexes Gebiet Ω gegeben, welches die Inklusion

$$\overline{\Omega} \subset \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{4h^2} \right\}$$

erfülle. Im Zylinder Z_{2h} sei die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$ gegeben. Wir betrachten das Dirichlet-Randwertproblem für die H-Flächengleichung in der nichtparametrischen Form

$$\begin{aligned} &\zeta = \zeta(x, y) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ &\mathcal{M}\zeta = (1 + \zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1 + \zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega \\ &\zeta(x, y) = g(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \partial\Omega \, . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Hierbei ist $g \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ eine Randverteilung.
Wir wollen die Abgeschlossenheit des Problemes (5.8) gegenüber Folgenbildung untersuchen. Es sei dazu eine Folge von Grundgebieten Ω^n, eine Folge Randverteilungen $g^n : \partial\Omega^n \to \mathbb{R}$ und eine Folge von mittleren Krümmungen H^n gegeben. Dazu besitze das Problem (5.8) zu den Daten Ω^n, g^n, H^n eine Lösung ζ^n. Wir nehmen nun an, die Gebiete Ω^n konvergieren in einem gewissen Sinne gegen ein Gebiet Ω, die Randverteilungen g^n gegen eine Randverteilung g und die mittleren Krümmungen H^n gegen ein H. Es ist dann die Frage, ob das Problem (5.8) erneut eine Lösung zu den Daten H, g und Ω besitzt.
Um eine solche Lösung zu konstruieren, ist es nötig, auf jedem Graph ζ^n durch Umparametrisierung mittels Satz 1 konforme Parameter $\mathbf{x}^n$ einzuführen. Um dann mit dem Oszillationslemma von Courant-Lebesgue die gleichgradige Stetigkeit der Folge $\mathbf{x}^n$ nachzuweisen, benötigen wir zunächst eine gleichmäßige Abschätzung des Dirichletintegrals. Dieses berechnet man im Falle der konformen Parametrisierung durch

$$D(\mathbf{x}^n) := \int_B (|\mathbf{x}_u^n|^2 + |\mathbf{x}_v^n|^2) du dv = 2 \int_B |\mathbf{x}_u^n \wedge \mathbf{x}_v^n| du dv = 2A(\mathbf{x}^n) \, . \tag{5.9}$$

Wir beachten, dass hier $A(\mathbf{x}^n)$ den Flächeninhalt der Fläche $\mathbf{x}^n$ angibt, welchen wir ebenfalls berechnen können durch

$$A(\mathbf{x}^n) = A(\zeta^n) = \int\limits_\Omega (1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{1}{2}}\, dxdy\ .$$

Wir benötigen daher folgendes Resultat, welches wir der Arbeit [4] entnommen haben.

Hilfssatz 1 : *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte, offene Menge, deren Rand eine C^2-Jordankurve bilde. Für Flächeninhalt sowie die Länge der Randkurve von Ω gelte*

$$\int\limits_\Omega dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} d\sigma(x,y) \le l$$

mit einer Konstante l. Gegeben sei eine Funktion $\zeta = \zeta(x,y) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, deren Graph eine H-Fläche zur vorgeschriebenen mittleren Krümmung $H \in C^0(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\sup_{\substack{(x,y)\in\Omega \\ z\in\mathbb{R}}} |H(x,y,z)| \le h$$

bilde. Es gebe ein $M > 0$ mit

$$|\zeta(x,y)| \le M \quad \textit{für } (x,y)\in\overline{\Omega}\ .$$

Dann ist der Flächeninhalt $A(\zeta)$ des Graphen ζ über der x,y-Ebene abgeschätzt durch

$$A(\zeta) = \int\limits_\Omega (1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{1}{2}}\, dxdy \le C$$

mit einer Konstanten $C = C(M,h,l)$.

Beweis:
Da ζ als Graph eine H-Fläche ist, genügt ζ wegen Hilfssatz 2 aus §1 der Differentialgleichung

$$\operatorname{div}\frac{\nabla\zeta}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}} = 2H(x,y,\zeta(x,y)) \quad \text{für } (x,y)\in\Omega\ .$$

Wir benutzen diese für die Berechnung

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\frac{\zeta\nabla\zeta}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}} &= \zeta\operatorname{div}\frac{\nabla\zeta}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= 2H\zeta + \frac{|\nabla\zeta|^2}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= 2H\zeta + (1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}} - (1+|\nabla\zeta|^2)^{-\frac{1}{2}}\ .
\end{aligned}$$

Durch Integration über Ω ergibt sich für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega (1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}\, dxdy &= \int\limits_\Omega \operatorname{div}\frac{\zeta\nabla\zeta}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}}\, dxdy + \int\limits_\Omega \Big((1+|\nabla\zeta|^2)^{-\frac{1}{2}} - 2H\zeta\Big)\, dxdy \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\zeta(\nabla\zeta\cdot\nu)}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}}\, d\sigma(x,y) + \int\limits_\Omega \Big((1+|\nabla\zeta|^2)^{-\frac{1}{2}} - 2H\zeta\Big)\, dxdy\ .
\end{aligned}$$

Wir haben hierbei den Gauss'schen Integralsatz verwendet. Es ist $\nu = \nu(x,y)$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ im Punkt (x,y). Mit Hilfe der Abschätzung

$$\frac{|\nabla\zeta \cdot \nu|}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{|\nabla\zeta|}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}} \le 1$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} (1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}} dxdy &\le \int\limits_{\partial\Omega} |\zeta| d\sigma(x,y) + \int\limits_{\Omega} (1+2H\zeta) dxdy \\
&\le M \int\limits_{\partial\Omega} d\sigma(x,y) + (1+2hM) \int\limits_{\Omega} dxdy \\
&\le Ml + (1+2hM)l =: C(M,l,h) \ .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Wir zeigen nun die folgende a priori-Abschätzung.

Hilfssatz 2 : *Die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{\alpha}(\mathcal{O})$ erfülle in der beschränkten Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ die Abschätzung*

$$||H||_{\alpha}^{\mathcal{O}} \le h \ .$$

Weiterhin sei eine reguläre H-Fläche in konformen Parametern $\mathbf{x} = \mathbf{x}(w) : \overline{B} \to \mathcal{O} \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ gegeben. Die Fläche unterliege dem Stetigkeitsmodul

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall w, w' \in \overline{B} \ : \ |w - w'| \le \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ |\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w')| \le \varepsilon \tag{5.10}$$

mit einer Funktion $\delta = \delta(\varepsilon) : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$. Die Fläche spanne sich in eine Randkurve Γ ein, welche die Parametrisierung $\gamma = \gamma(t) : \mathbb{R} \to \Gamma \in C^2(\mathbb{R})$ besitze und den Abschätzungen

$$|\gamma'(t)| \ge L \quad \text{für}\, t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad ||\gamma||_2^{\mathbb{R}} \le M_1 \tag{5.11}$$

mit Konstanten $L > 0, M_1 < +\infty$ unterliege. Dann gibt es eine Konstante $C_1 = C_1(\delta, M_1, L, h, \mathcal{O})$, so dass die a priori-Abschätzung

$$||\mathbf{x}||_{1+\frac{1}{2}\alpha}^{B} \le C_1$$

gilt. Weiterhin gibt es zu jedem $0 < r < 1$ eine Konstante $C_2 = C_2(\delta, h, r, \mathcal{O})$ mit

$$||\mathbf{x}||_{2+\alpha}^{B_r} \le C_2 \ .$$

Beweis:
1.) Wir zeigen zunächst die innere Abschätzung. Zu beliebigem $0 < r < 1$ betrachten wir die Kugel $B_r = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < r\}$. Wir wählen zunächst endlich viele Punkte $w_1, ..., w_N \in B_r$ mit $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\overline{B}_r \subset B_{\delta(\frac{1}{2h})}(w_1) \cup ... \cup B_{\delta(\frac{1}{2h})}(w_N) \ .$$

Wir setzen $U_j := B_{\delta(\frac{1}{2h})}(w_j) \cap B$ und ermitteln offene Mengen $V_j \subset\subset U_j$ für $j = 1, ..., N$, welche ebenfalls die Eigenschaft

$$\overline{B}_r \subset V_1 \cup ... \cup V_n$$

haben. Der Stetigkeitsmodul (5.10) liefert nun

$$|\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w_j)| \le \frac{1}{2h} \quad \text{für } w \in U_j \text{ und } j = 1, ..., N \ .$$

Weiterhin genügt $\mathbf{x}$ der Differentialungleichung

$$|\triangle \mathbf{x}| = |2H\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \leq 2h|\mathbf{x}_u||\mathbf{x}_v| = h(|\mathbf{x}_u|^2 + |\mathbf{x}_v|^2) = h|\nabla \mathbf{x}|^2 ,$$

also der charakteristischen Differentialungleichung mit quadratischem Wachstum im Gradienten. Da innerhalb jeder Menge U_j die benötigte Kleinheitsbedingung erfüllt ist, können wir die innere Gradienten- sowie $C^{1+\alpha}$-Abschätzung aus [9], Kap. XVII, §2, Sätze 1 und 2 anwenden. Diese liefern zu jedem $j = 1, ..., N$ eine Konstante $C_j(\alpha, U_j, V_j, r, h, \mathcal{O})$ mit

$$||\mathbf{x}||_{1+\alpha}^{V_j} \leq C_j \quad \text{für } j = 1, ..., N .$$

Setzen wir nun $V := V_1 \cup ... \cup V_N$, so ermitteln wir aus obiger Abschätzung eine Konstante $\tilde{C}_1$ mit

$$||\mathbf{x}||_{1+\alpha}^{V} \leq \tilde{C}_1 .$$

Erklären wir nun $\psi(w) := 2H(\mathbf{x}(w))\mathbf{x}_u(w) \wedge \mathbf{x}_v(w) = \triangle \mathbf{x}(w)$, so können wir die Abschätzung

$$||\psi||_{\alpha}^{V} \leq \tilde{C}_2$$

erbringen mit einer Konstanten $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(\tilde{C}_1, h)$. Beachten wir $B_r \subset\subset V$, so liefern die inneren Schauderabschätzungen (vgl. [9], Kap. XV, §7) ein $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_3(\alpha, \tilde{C}_2, V, B_r)$ mit

$$||\mathbf{x}||_{2+\alpha}^{B_r} \leq \tilde{C}_3(||\mathbf{x}||_0^V + ||\psi||_{\alpha}^V) \leq C_3(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) =: \tilde{C}_4(r) . \tag{5.12}$$

2.) Wir kommen nun zu der Abschätzung am Rande. Wir orientieren uns hierbei an dem Beweis von Theorem 2, Kap. 7.3 aus [1]. Dort wird jedoch im Unterschied zu unserem Satz eine Regularitätsaussage und keine Abschätzung bewiesen.
Wir wählen zunächst einen Punkt $w_0 \in \partial B$ und werden Abschätzungen in einer Umgebung von w_0 erbringen. Da $\mathbf{x}(w_0) \in \Gamma$ gilt, gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(w_0) = \gamma(t_0)$. Durch Umparametrisierung der Randkurve $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t - t_0)$ können wir ohne Einschränkung $t_0 = 0$ annehmen. Wir ermitteln wir nun eine Rotationsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für welche $A\gamma'(0) = (0, 0, \lambda)$ richtig ist, wobei $\lambda = |\gamma'(0)| \geq 0$ gesetzt ist. Wenden wir diese Rotation im Bildbereich an, so können wir weiterhin

$$\gamma'(0) = (0, 0, (\gamma^3)'(0)) \tag{5.13}$$

voraussetzen. Wir bemerken weiterhin, dass unter dieser Transformationen die Abschätzungen (5.10) und (5.11) mit den selben Konstanten erhalten bleiben, da nämlich unter der Rotation A Längen erhalten bleiben.
Wir setzen nun

$$\dot{\gamma}^k(t) := \frac{d}{dt}\gamma^k(t) \quad \text{für } k = 1, 2, 3$$

und beachten $\dot{\gamma}^3(0) = |\gamma'(0)| \geq L$. Daraus lässt sich mit (5.11) eine Konstante $T_0 = T_0(L, M_1) > 0$ ermitteln, so dass

$$\dot{\gamma}^3(t) \geq \frac{1}{2}L \quad \text{für } |t| \leq T_0$$

richtig ist. Somit ist $\gamma_3 : [-T_0, T_0] \to [\gamma^3(-T_0), \gamma^3(T_0)]$ streng monoton steigend und bijektiv. Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} \gamma^3(T_0) - \gamma^3(0) &= \int_0^{T_0} \dot{\gamma}^3(t)dt \geq \int_0^{T_0} \frac{1}{2}Ldt = \frac{1}{2}LT_0 \\ \gamma^3(0) - \gamma^3(-T_0) &= \int_{-T_0}^{0} \dot{\gamma}^3(t)dt \geq \int_{-T_0}^{0} \frac{1}{2}Ldt = \frac{1}{2}LT_0 . \end{aligned}$$

Setzen wir nun $D := [\gamma^3(0)-T_1, \gamma^3(0)+T_1]$ mit $T_1 := \frac{1}{2}LT_0$, so folgt $D \subset [\gamma^3(-T_0), \gamma^3(T_0)]$. Somit ist Funktion

$$\beta(t) = (\beta^1(t), \beta^2(t), \beta^3(t)) : D \to \Gamma \in C^{2+\alpha}(D) \quad , \quad \beta(t) := \gamma \circ (\gamma^3)^{-1}(t) \; .$$

wohldefiniert, und wir beachten

$$\beta^3(t) = t \quad \text{für } t \in D \; . \tag{5.14}$$

Außerdem ist $\beta(\gamma^3(0)) = \mathbf{x}(w_0)$ richtig. Daher parametrisiert β einen Teil der Randkurve Γ in einer Umgebung des Punktes $\mathbf{x}(w_0)$. Aus (5.11) ermitteln wir eine Konstante $M_3 = M_3(L, M_1) < +\infty$ mit

$$||\beta||_2^D \leq M_3 \; . \tag{5.15}$$

Wegen (5.13) gilt weiter $\dot\beta^1(0) = 0$ sowie $\dot\beta^2(0) = 0$. Daraus ermitteln wir mit Hilfe von (5.15) ein $T_2 = T_2(M_3, T_1)$ mit $0 < T_2 \leq T_1$ sowie

$$|\dot\beta^1(t)|^2 \leq \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad |\dot\beta^2(t)|^2 \leq \frac{1}{8} \quad \text{für } t \in [\gamma^3(0) - T_2, \gamma^3(0) + T_2] \; . \tag{5.16}$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ folgern wir aus Voraussetzung (5.10)

$$|\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w_0)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } w \in \overline{S}_{\delta(\varepsilon)} \; , \tag{5.17}$$

wobei wir die Menge

$$S_\varrho = S_\varrho(w_0) := \{w \in B \mid |w - w_0| < \varrho\}$$

erklärt haben. Setzen wir $\mathbf{x}(w) = (\mathbf{x}^1(w), \mathbf{x}^2(w), \mathbf{x}^3(w))$, so folgt für $\varepsilon = T_2$ insbesondere

$$|\mathbf{x}^3(w) - \mathbf{x}^3(w_0)| \leq T_2 \quad \text{für alle } w \in \overline{S}_{\delta(T_2)} \; ,$$

Daher ist die folgende Hilfsfunktion

$$\mathbf{y}(w) = (\mathbf{y}^1(w), \mathbf{y}^2(w)) : \overline{S}_{\delta(T_2)} \to \mathbb{R}^2 \in C^{2+\alpha}(\overline{S}_{\delta(T_2)})$$

wohlerklärt durch

$$\mathbf{y}^k(w) := \mathbf{x}^k(w) - \beta^k(\mathbf{x}^3(w)) \quad \text{für } w \in \overline{S}_{\delta(T_2)} \text{ und } k = 1, 2 \; . \tag{5.18}$$

Wegen (5.14) erfüllt $\mathbf{y}^k$ die folgende Randbedingung

$$\mathbf{y}^k(w) = 0 \quad \text{für } w \in \partial S_{\delta(T_2)} \cap \partial B \; , \; k = 1, 2 \; , \tag{5.19}$$

insbesondere gilt also $\mathbf{y}^k(w_0) = 0$. Differenzieren wir $\mathbf{y}^k$ nach w, so folgt

$$\mathbf{y}^k_w = \mathbf{x}^k_w - \dot\beta^k(\mathbf{x}^3)\mathbf{x}^3_w \; .$$

Erneute Differentiation nach $\overline{w}$ liefert

$$\mathbf{y}^k_{w\overline{w}} = \mathbf{x}^k_{w\overline{w}} - \ddot\beta^k(\mathbf{x}^3)\mathbf{x}^3_w\mathbf{x}^3_{\overline{w}} - \dot\beta^k(\mathbf{x}^3)\mathbf{x}^3_{w\overline{w}} \; ,$$

woraus wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}^k_{w\overline{w}}| &\leq |\mathbf{x}_{w\overline{w}}| + M_3|\mathbf{x}_w||\mathbf{x}_{\overline{w}}| + M_3|\mathbf{x}_{w\overline{w}}| \\ &\leq h|\mathbf{x}_w|^2 + M_3|\mathbf{x}_w|^2 + M_3 h|\mathbf{x}_w|^2 \; , \\ &\leq (h+1)(M_3+1)|\mathbf{x}_w|^2 \end{aligned}$$

und weiter

$$|\mathbf{y}_{w\overline{w}}| \le 2(h+1)(M_3+1)|\mathbf{x}_w|^2 \tag{5.20}$$

erhalten. Hierbei haben wir $|\mathbf{x}_{w\overline{w}}| \le h|\mathbf{x}_w|^2$ ausgenutzt.
Wegen der konformen Parametrisierung der Fläche $\mathbf{x}$ gilt die Ungleichung

$$|\mathbf{x}_w^3|^2 \le |\mathbf{x}_w^1|^2 + |\mathbf{x}_w^2|^2 \, . \tag{5.21}$$

Diese nutzen wir zusammen mit (5.16) aus, um die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_w^k|^2 &= |\mathbf{y}_w^k + \dot\beta^k(\mathbf{x}^3)\mathbf{x}_w^3|^2 \le 2|\mathbf{y}_w^k|^2 + 2|\dot\beta^k(\mathbf{x}^3)|^2|\mathbf{x}_w^3|^2 \\ &\le 2|\mathbf{y}_w^k|^2 + \frac{1}{4}|\mathbf{x}_w^3|^2 \le 2|\mathbf{y}_w^k|^2 + \frac{1}{4}(|\mathbf{x}_w^1|^2 + |\mathbf{x}_w^2|^2) \end{aligned}$$

für $k = 1, 2$ herzuleiten. Die Addition der beiden Gleichungen liefert

$$|\mathbf{x}_w^1|^2 + |\mathbf{x}_w^2|^2 \le 2(|\mathbf{y}_w^1|^2 + |\mathbf{y}_w^2|^2) + \frac{1}{2}(|\mathbf{x}_w^1|^2 + |\mathbf{x}_w^2|^2)$$

und daraus folgt

$$|\mathbf{x}_w^1|^2 + |\mathbf{x}_w^2|^2 \le 4(|\mathbf{y}_w^1|^2 + |\mathbf{y}_w^2|^2) \, .$$

Beachten wir erneut (5.21), so folgt

$$|\mathbf{x}_w|^2 = |\mathbf{x}_w^1|^2 + |\mathbf{x}_w^2|^2 + |\mathbf{x}_w^3|^2 \le 2|\mathbf{x}_w^1|^2 + 2|\mathbf{x}_w^2|^2 \le 8|\mathbf{y}_w^1|^2 + 8|\mathbf{y}_w^2|^2 = 8|\mathbf{y}_w|^2 \, . \tag{5.22}$$

Zusammen mit (5.20) ermitteln wir die Abschätzung

$$|\mathbf{y}_{w\overline{w}}| \le 16(h+1)(M_3+1)|\mathbf{y}_w|^2 =: M_4|\mathbf{y}_w|^2 \, .$$

Äquivalent dazu ist

$$|\triangle \mathbf{y}| \le M_4 |\nabla \mathbf{y}|^2 \, ;$$

$\mathbf{y}$ genügt also der charakteristischen Differentialungleichung mit quadratischem Wachstum im Gradienten. Um nun die bekannten a priori-Abschätzungen anwenden zu können, müssen wir die benötigte Kleinheitsbedingung erreichen. Dazu berechnen wir unter Beachtung von (5.16)

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}^k(w)| &= |\mathbf{y}^k(w) - \mathbf{y}^k(w_0)| \\ &\le |\mathbf{x}^k(w) - \mathbf{x}^k(w_0)| + |\beta^k(\mathbf{x}^3(w)) - \beta^k(\mathbf{x}^3(w_0))| \\ &\le |\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w_0)| + \frac{1}{2}|\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w_0)| = \frac{3}{2}|\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w_0)| \end{aligned}$$

und somit gilt

$$|\mathbf{y}(w)| \le 3|\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w_0)| \quad \text{für } w \in S_{\delta(T_2)} \, .$$

Wir erklären nun die Konstante

$$T_3 := \frac{1}{6M_4}$$

und folgern aus (5.17)

$$|\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w_0)| \le T_3 \quad \text{für } w \in \overline{S}_{\delta(T_3)} \, .$$

Setzen wir nun noch $\varepsilon := \frac{1}{2}\min(\delta(T_2), \delta(T_3))$, so folgt die Kleinheitsbedingung

$$M_4|\mathbf{y}(w)| \le 3M_4|\mathbf{x}(w) - \mathbf{x}(w_0)| \le 3M_4T_3 = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{in } \overline{S}_{2\varepsilon} \, .$$

Weiterhin beachten wir, das wegen (5.19) die Funktion $\mathbf{y}$ der Randbedingung

$$\mathbf{y}^k(w) = 0 \quad \text{auf } \partial S_{2\varepsilon} \cap \partial B \text{ für } k = 1,2$$

genügt. Wir verwenden nun eine Interpolation aus innerer und Randabschätzung (siehe [9], Kap. XVII, §2 und §3) und erhalten damit eine Konstante $C_1 = C_1(M_4, \varepsilon, \alpha)$ mit

$$||\mathbf{y}||_{1+\alpha}^{S_\varepsilon} \leq C_1 \ . \tag{5.23}$$

Aus (5.22) folgern wir $|\mathbf{x}_w| \leq 4|\mathbf{y}_w|$ oder äquivalent $|\nabla\mathbf{x}| \leq 4|\nabla\mathbf{y}|$ und zusammen mit (5.23) ergibt sich

$$|\nabla\mathbf{x}| \leq 4C_1 \quad \text{in } S_\varepsilon(w_0) \ .$$

Diese Abschätzung gilt für alle $w_0 \in \partial B$. Beachten wir nun, dass die Konstanten ε und C_1 unabhängig von w_0 sind, so folgt die Gradientenabschätzung am Rande

$$|\nabla\mathbf{x}(w)| \leq 4C_1 \quad \text{für } 1 - \varepsilon < |w| < 1 \ . \tag{5.24}$$

Wir kombinieren diese mit der inneren Abschätzung (5.12) und ermitteln eine Konstante C_2, so dass die globale Gradientenabschätzung

$$|\nabla\mathbf{x}(w)| \leq C_2 \quad \text{in } B \ . \tag{5.25}$$

richtig ist.
Wir werden nun noch die Hölder-Halbnorm des Gradienten global abschätzen. Dazu betrachten wir erneut die Hilfsfunktion $\mathbf{y}$ erklärt in der Menge $S_\varepsilon(w_0)$. In die Gleichung

$$0 = \mathbf{x}_w \cdot \mathbf{x}_w = (\mathbf{x}_w^1)^2 + (\mathbf{x}_w^2)^2 + (\mathbf{x}_w^3)^2 \ ,$$

welche wegen der konformen Parametrisierung von $\mathbf{x}$ richtig ist, setzen wir

$$\mathbf{x}_w^k = \mathbf{y}_w^k + \dot\beta^k(\mathbf{x}^3)\mathbf{x}_w^3 \quad , \ k = 1,2$$

ein und erhalten

$$0 = (\mathbf{y}_w^1)^2 + (\mathbf{y}_w^2)^2 + 2\mathbf{x}_w^3\Big(\dot\beta^1(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}_w^1 + \dot\beta^2(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}_w^2\Big) + \Big((\dot\beta^1(\mathbf{x}^3))^2 + (\dot\beta^2(\mathbf{x}^3))^2 + 1\Big)(\mathbf{x}_w^3)^2 \ .$$

Erklären wir die Funktionen

$$q(t) := 1 + (\dot\beta^1(t))^2 + (\dot\beta^2(t))^2 \quad \text{sowie} \quad p^k(t) := \frac{\dot\beta^k(t)}{q(t)}$$

so ist obige Gleichung äquivalent zu

$$\Big[\mathbf{x}_w^3 + p^1(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}_w^1 + p^2(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}_w^2\Big]^2 = \Big\{p^1(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}_w^1 + p^2(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}_w^2\Big\}^2 - \frac{(\mathbf{y}_w^1)^2 + (\mathbf{y}_w^2)^2}{q(\mathbf{x}^3)} \ .$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit w^2 und erhalten

$$\Big[w\mathbf{x}_w^3 + p^1(\mathbf{x}^3)w\mathbf{y}_w^1 + p^2(\mathbf{x}^3)w\mathbf{y}_w^2\Big]^2 = \Big\{p^1(\mathbf{x}^3)w\mathbf{y}_w^1 + p^2(\mathbf{x}^3)w\mathbf{y}_w^2\Big\}^2 - \frac{(w\mathbf{y}_w^1)^2 + (w\mathbf{y}_w^2)^2}{q(\mathbf{x}^3)} \ .$$

Wir führen nun Polarkoordinaten $w = re^{i\varphi}$ ein und beachten

$$\mathbf{x}_\varphi = \mathbf{x}_w iw - \mathbf{x}_{\overline{w}} i\overline{w} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_w \frac{w}{r} - \mathbf{x}_{\overline{w}} \frac{\overline{w}}{r} \ ,$$

woraus sich $w\mathbf{x}_w = \frac{1}{2}(r\mathbf{x}_r - i\mathbf{x}_\varphi)$ und analog $w\mathbf{y}_w = \frac{1}{2}(r\mathbf{y}_r - i\mathbf{y}_\varphi)$ ergibt. Wir schränken nun die Argumentation auf die Menge $\partial B \cap \partial S_\varepsilon$ ein und beachten, dass dort wegen Randbedingung (5.19) $\mathbf{y}_\varphi = 0$ richtig ist, also gilt insbesondere

$$0 = \mathbf{y}^k_\varphi = \mathbf{x}^k_\varphi + \dot\beta^k(\mathbf{x}^3)\mathbf{x}^3_\varphi$$

und äquivalent

$$\mathbf{x}^k_\varphi = -\dot\beta(\mathbf{x}^3)\mathbf{x}^3_\varphi \quad \text{auf } \partial B \cap \partial S_\varepsilon \;,\; k = 1,2 \;. \tag{5.26}$$

Es folgt nun

$$\Big[\mathbf{x}^3_r - i\mathbf{x}^3_\varphi + p^1(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}^1_r + p^2(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}^2_r\Big]^2 = \Big\{p^1(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}^1_r + p^2(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}^2_r\Big\}^2 - \frac{(\mathbf{y}^1_r)^2 + (\mathbf{y}^2_r)^2}{q(\mathbf{x}^3)}.$$

Setzen wir

$$a := \mathbf{x}^3_r + p^1(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}^1_r + p^2(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}^2_r \quad \text{und} \quad b := \mathbf{x}^3_\varphi$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, so ist die linke Seite der Gleichung von der Form $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. Weiterhin ist die rechte Seite der Gleichung eine reelle Zahl, somit muß $ab = 0$ gelten. Wir zeigen nun, dass $b = \mathbf{x}^3_\varphi \neq 0$ sein muss. Wäre nämlich $\mathbf{x}^3_\varphi = 0$, so wäre wegen (5.26) ebenfalls $\mathbf{x}^1_\varphi = 0 = \mathbf{x}^2_\varphi$ und somit $\mathbf{x}_\varphi = 0$. Dies stellt jedoch einen Widerspruch zur Regularität der Fläche dar, denn diese liefert $|\mathbf{x}_\varphi|^2 = |\mathbf{x}_r|^2 > 0$ auf ∂B. Folglich muss $a = 0$ gelten und somit gilt die Randbedingung

$$(\mathbf{x}^3_\varphi)^2 = \frac{(\mathbf{y}^1_r)^2 + (\mathbf{y}^2_r)^2}{q(\mathbf{x}^3)} - \Big\{p^1(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}^1_r + p^2(\mathbf{x}^3)\mathbf{y}^2_r\Big\}^2 \quad \text{in } \partial B \cap \partial S_\varepsilon \;.$$

Die Abschätzungen (5.15), (5.23) und (5.24) liefern nun eine Hölderabschätzung der rechten Seite dieser Gleichung, und somit eine Konstante C_3 mit

$$|(\mathbf{x}^3_\varphi(w_1))^2 - (\mathbf{x}^3_\varphi(w_2))^2| \le C_3|w_1 - w_2|^\alpha \quad \text{für } w_1, w_2 \in \partial B \cap \partial S_\varepsilon \;.$$

Beachten wir nun die Ungleichung

$$|x - y| \le |x^2 - y^2|^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } xy > 0 \;,$$

so erhalten wir die Abschätzung

$$|\mathbf{x}^3_\varphi(w_1) - \mathbf{x}^3_\varphi(w_2)| \le C_3|w_1 - w_2|^{\frac{1}{2}\alpha} \quad \text{für } w_1, w_2 \in \partial B \cap \partial S_\varepsilon \;.$$

Mit der Gleichung (5.26) schätzen wir ebenfalls $\mathbf{x}^1_\varphi$ und $\mathbf{x}^2_\varphi$ ab und ermitteln eine Konstante C_4, für welche

$$|\mathbf{x}_\varphi(w_1) - \mathbf{x}_\varphi(w_2)| \le C_4|w_1 - w_2|^{\frac{1}{2}\alpha} \quad \text{für } w_1, w_2 \in \partial B \cap \partial S_\varepsilon$$

richtig ist. Diese Abschätzung gilt nun in $\partial B \cap \partial S_\varepsilon(w_0)$ für jeden Randpunkt $w_0 \in \partial B$. Wir beachten, dass die Konstanten ε und C_4 unabhängig von w_0 sind, also gilt

$$|\mathbf{x}_\varphi(w_1) - \mathbf{x}_\varphi(w_2)| \le C_5|w_1 - w_2|^{\frac{1}{2}\alpha} \quad \text{für } w_1, w_2 \in \partial B$$

mit einer Konstante C_5. Damit können wir ebenfalls eine Konstane C_6 angeben, für welche

$$||\mathbf{x}||^{\partial B}_{1+\frac{1}{2}\alpha} \le C_6$$

richtig ist. Wegen (5.25) genügt weiterhin $\triangle\mathbf{x}$ der Abschätzung

$$|\triangle\mathbf{x}| = |2H\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_u| \le 2h|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \le 2h|\mathbf{x}_u||\mathbf{x}_v| \le 2h(C_2)^2 \quad \text{in } B \;.$$

Der Satz 3 in §7 liefert damit eine Konstante C_7, so dass

$$||\mathbf{x}||^{B}_{1+\frac{1}{2}\alpha} \le C_7$$

richtig ist. q.e.d.

Definition 1 : Es sei eine Folge Γ^n von Jordankurven im $\mathbb{R}^3$ gegeben mit ihren regulären Parametrisierungen

$$\gamma^n = \gamma^n(w) : \partial B \to \Gamma^n \in C^2(\partial B) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \, .$$

Weiterhin gebe es eine Jordankurve Γ mit zugehöriger regulärer Parametrisierung

$$\gamma = \gamma(w) : \partial B \to \Gamma \in C^2(\partial B) \, .$$

Wir sagen dann, dass Γ^n gegen Γ konvergiert, falls für die Parametrisierungen die Konvergenz

$$\gamma^n \;\to\; \gamma \quad \text{in } C^2(\partial B)$$

gilt.

Für eine beschränkte Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ erklären wir ihren Durchmesser

$$\operatorname{diam} \mathcal{O} := \sup_{x,y \in \mathcal{O}} |x - y| \, .$$

Zu einer einfach geschlossenen Jordankurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ seien zwei Punkte $z_1, z_2 \in \Gamma$ gewählt. Zu diesen gibt es zwei disjunkte, zusammenhängende Bögen $D_1 = D_1(\Gamma, z_1, z_2), D_2 = D_2(\Gamma, z_1, z_2) \subset \Gamma$, welche die Eigenschaften

$$D_1 \cup D_2 \cup \{z_1, z_2\} = \Gamma \quad \text{und} \quad z_j \notin D_k \quad \text{für } j, k = 1, 2$$

erfüllen. Die Mengen D_1, D_2 sind durch diese Eigenschaften bis auf Vertauschung eindeutig festgelegt. Betrachten wir nun eine Folge von einfach geschlossenen Jordankurven Γ^n, welche gegen eine einfach geschlossene Jordankurve Γ gemäß Definition 1 konvergiere. Dann erfüllt die Folge Γ^n eine gleichmäßige Bogen-Sehnen-Bedingung in folgendem Sinne: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta = \eta(\varepsilon)$, so dass für zwei beliebige $z_1, z_2 \in \Gamma^n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung

$$|z_1 - z_2| \le \eta \;\Rightarrow\; \min(\operatorname{diam} D_1(\Gamma^n, z_1, z_2), \operatorname{diam} D_2(\Gamma^n, z_1, z_2)) \le \varepsilon$$

erfüllt ist.

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Paragraphen.

Satz 2 :
Voraussetzungen:
1.) Zu $h > 0$ betrachten wir eine Folge $\Omega^n \subset \mathbb{R}^2$ von $2h$-konvexen Gebieten mit reell analytischem Rand. Auf $\partial\Omega^n$ seien die Randverteilungen $g^n : \partial\Omega^n \to \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega^n)$ so vorgeschrieben, dass die Folge der Randkurven

$$\Gamma^n := \{(x, y, g^n(x, y)) \mid (x, y) \in \partial\Omega^n\}$$

gegen die Randkurve

$$\Gamma := \{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in \partial\Omega\}$$

im Sinne von Definition 1 konvergiere. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein $2h$-konvexes Gebiet mit $C^{2+\alpha}$-Randkurve sowie $g \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$.

2.) Gegeben sei eine Folge von vorgeschriebenen mittleren Krümmungen $H^n \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$

sowie ein $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$. Es gebe eine Menge $\mathcal{O} \subset Z_{2h}$, so dass innerhalb $\mathcal{O}$ die Konvergenz $H^n \to H$ in $C^1(\mathcal{O})$ erfüllt ist. Es gelte die Abschätzung

$$|H^n(x,y,z)| \leq h \quad \textit{in } \mathcal{O} \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

sowie die Ungleichung

$$\frac{\partial H}{\partial z} \geq 0 \quad \textit{in } \mathcal{O} \,.$$

3.) Das Problem (5.8) besitze auf dem Grundgebiet Ω^n zu den Randwerten g^n und der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H^n eine Lösung $\zeta^n \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^n)$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$, welche die Bedingung

$$(x,y,\zeta^n(x,y)) \in \mathcal{O} \quad \textit{für } (x,y) \in \Omega^n \textit{ und } n \in \mathbb{N}$$

erfülle.

Behauptung: Dann besitzt das Problem (5.8) ebenfalls auf dem Gebiet Ω zur Randverteilung g und mittlerer Krümmung H eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Beweis:
Wählen wir zunächst ein festes $(x_0, y_0) \in \Omega$ aus. Wegen $\partial\Omega^n \to \partial\Omega$ finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sowie ein $d > 0$ mit

$$(x_0,y_0) \in \Omega^n \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}((x_0,y_0),\partial\Omega^n) \geq d \quad \text{für alle } n \geq n_0 \,. \tag{5.27}$$

Wir nehmen nun ohne Einschränkung $n_0 = 1$ an. Mit Hilfe von Satz 1 führen wir auf den Flächen ζ^n konforme Parameter ein. Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Diffeomorphismus

$$f^n : \overline{B} \to \overline{\Omega}^n \in C^{2+\alpha}(\overline{B}) \quad \text{mit} \quad f^n(0,0) = (x_0,y_0)$$

und mit der Eigenschaft

$$J_{f^n}(u,v) > 0 \quad \text{in } \overline{B} \,, \tag{5.28}$$

so dass die umparametrisierte Fläche

$$\mathbf{x}^n(u,v) : \overline{B} \to Z_{2h} \in C^{2+\alpha}(\overline{B}) \quad , \quad \mathbf{x}^n(u,v) := (f^n(u,v), \zeta^n \circ f^n(u,v))$$

in konformen Parametern vorliegt.

1.) Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Randwerte g^n können wir zunächst ein $r < +\infty$ unabhängig von n ermitteln, so dass

$$|\mathbf{x}^n(u,v) \cdot e_3| = |\zeta^n \circ f^n(u,v)| = |g^n \circ f^n(u,v)| < r \quad \text{für } (u,v) \in \partial B$$

gilt. Es folgt dann insbesondere $\mathbf{x}^n(\partial B) \subset D_r$, wobei D_r die in Hilfssatz 2, §3 erklärte Menge ist. Aus diesem Hilfssatz folgern wir $\mathbf{x}^n(\overline{B}) \subset D_r$. Da nun D_r eine beschränkte Menge ist, folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $\mathbf{x}^n$.

2.) Wir weisen nun die gleichgradige Stetigkeit von $\mathbf{x}^n$ nach. Wegen Hilfssatz 1 können wir zunächst das Dirichletintegral von $\mathbf{x}^n$ abschätzen

$$D(\mathbf{x}^n) = \int\limits_B (|\mathbf{x}^n_u|^2 + |\mathbf{x}^n_v|^2)dxdy = 2\int\limits_B |\mathbf{x}^n_u \wedge \mathbf{x}^n_v|dudv \leq N$$

mit einer Konstanten N unabhängig von n. Hierzu beachten wir, dass wegen der Konvergenz $\partial\Omega^n \to \partial\Omega$ in C^2 die Länge der Randkurven $\partial\Omega^n$ und der Flächeninhalt von Ω^n gleichmäßig beschränkt sind.
Für beliebiges $w_0 \in \overline{B}$ und $\delta \in (0,1)$ gibt es nun mit dem Oszillationslemma (vgl. [5], Kap. VII, §5, Satz 3) ein $\delta^* = \delta^*(w_0, \delta) \in [\delta, \delta^{1/2}]$ mit

$$L := \int\limits_{\substack{|w-w_0|=\delta^* \\ w\in B}} |d\mathbf{x}^n(w)| \leq 2\Big(\frac{\pi N}{-\log\delta}\Big)^{\frac{1}{2}} =: C(\delta) \; . \tag{5.29}$$

Es sei nun $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}d$ beliebig gegeben. Beachten wir $C(\delta) \to 0$ für $\delta \to 0$, so können wir ein $0 < \delta < \frac{1}{4}$ so klein wählen, dass

$$C(\delta) \leq \min(\eta(\varepsilon), \varepsilon)$$

richtig ist. Hierbei ist $\eta = \eta(\varepsilon)$ die Funktion, für welche die gleichmäßige Bogen-Sehnen-Bedingung für die Folge Γ^n erfüllt ist.
Wir setzen nun $U = U_{\delta^*}(w_0) := \{w \in \overline{B} \mid |w - w_0| \leq \delta^*\}$. Den Rand ∂U von U können wir zerlegen in die beiden Mengen

$$\begin{aligned} \gamma &:= \{w \in \overline{B} \mid |w - w_0| = \delta^*\} \quad \text{sowie} \\ \beta &:= \{w \in \partial B \mid |w - w_0| \leq \delta^*\} \; , \end{aligned}$$

wobei β möglicherweise auch leer sein kann. Weiterhin erklären wir die Menge

$$\alpha := \overline{\partial B \backslash \beta} = \{w \in \partial B \mid |w - w_0| \geq \delta^*\} \; .$$

Da das in (5.29) erklärte L die Länge der Kurve $\mathbf{x}^n(\gamma)$ ist, gilt die Abschätzung

$$|\mathbf{x}^n(w_1) - \mathbf{x}^n(w_2)| \leq L \leq C(\delta) \leq \varepsilon \quad \text{für } w_1, w_2 \in \gamma \text{ und } n \in \mathbb{N} \; . \tag{5.30}$$

Fall A: Wir betrachten zunächst den Fall, dass β nicht leer ist. Wir finden dann zwei Punkte z_1 und z_2 mit

$$\{z_1, z_2\} = \gamma \cap \beta$$

wobei auch $z_1 = z_2$ möglich ist. Aus (5.30) folgern wir $|\mathbf{x}^n(z_1) - \mathbf{x}^n(z_2)| \leq C(\delta) \leq \eta(\varepsilon)$. Wir zerlegen nun die Randkurve $\mathbf{x}^n(\partial B)$ in die beiden zusammenhängenden Teile $\mathbf{x}^n(\alpha)$ sowie $\mathbf{x}^n(\beta)$. Die Bogen-Sehnen-Bedingung für die Randkurven liefert dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\min(\operatorname{diam} \mathbf{x}^n(\beta), \operatorname{diam} \mathbf{x}^n(\alpha)) \leq \varepsilon \; .$$

Nehmen wir nun an,

$$\operatorname{diam} \mathbf{x}^n(\alpha) \leq \varepsilon \tag{5.31}$$

sei richtig. Dann folgern wir daraus

$$\operatorname{diam} f^n(\alpha) \leq \varepsilon \; .$$

Die Kurve $f^n(\alpha) \cup f^n(\gamma) = f^n(\alpha \cup \gamma)$ ist eine einfach geschlossene Jordankurve im $\mathbb{R}^2$. Ihr Innengebiet ist die Menge $f^n(B\backslash U)$. Aus (5.30) sowie (5.31) leiten wir

$$\operatorname{diam} f^n(\alpha \cup \gamma) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

und weiter

$$\operatorname{diam} f^n(B\backslash U) \leq \operatorname{diam} f^n(\alpha \cup \gamma) \leq 2\varepsilon \tag{5.32}$$

ab. Wegen $\delta < \frac{1}{4}$ ist nun $(0,0) \in B \backslash U$ richtig, woraus man $f^n(0,0) = (x_0, y_0) \in f^n(B \backslash U)$ ableitet. Deshalb gilt unter Beachtung von (5.27)

$$\begin{aligned} \text{diam } f^n(B \backslash U) &\geq |f^n(0,0) - f^n(z_1)| \geq |(x_0, y_0) - f^n(z_1)| \\ &\geq \text{dist } ((x_0, y_0), \partial\Omega^n)| \geq d > 2\varepsilon \ , \end{aligned}$$

was jedoch im Widerspruch zu (5.32) steht. Die Annahme (5.31) ist somit falsch und es gilt

$$\text{diam } \mathbf{x}^n(\beta) \leq \varepsilon \ .$$

Zusammen mit (5.30) folgt

$$\text{diam } \mathbf{x}^n(\gamma \cup \beta) = \text{diam } \mathbf{x}^n(\partial U) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \ .$$

Betrachten wir nun

Fall B: Die Menge β sei leer. Es folgt dann $\gamma = \partial U$ und die Abschätzung (5.30) liefert

$$\text{diam } \mathbf{x}^n(\partial U) \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon \ .$$

In beiden Fällen erhalten wir also

$$\text{diam } \mathbf{x}^n(\partial U) \leq 2\varepsilon \ . \tag{5.33}$$

Wegen der Injektivität von f^n folgt

$$\text{diam } f^n(U) = \text{diam } f^n(\partial U) \leq \text{diam } \mathbf{x}^n(\partial U) \leq 2\varepsilon \ .$$

Daraus leiten wir

$$|f^n(w) - f^n(w')| \leq \text{diam } f^n(U) \leq 2\varepsilon \quad \text{für } w \in U$$

ab, wobei $w' \in \partial U$ beliebig gewählt ist. Es sei nun ε so klein gewählt ist, dass $2h\varepsilon < 1$ richtig ist. Für alle $\varepsilon' > \varepsilon$ mit $2h\varepsilon' < 1$ gilt dann

$$\tilde{\mathbf{x}}(U) \subset Z_{\frac{1}{2\varepsilon'}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < (2\varepsilon')^2\},$$

wobei wir die Fläche $\tilde{\mathbf{x}}(w) := \mathbf{x}^n(w) - \mathbf{x}^n(w')$ gesetzt haben. Aus (5.33) ergibt sich weiterhin

$$\tilde{\mathbf{x}}(\partial U) \subset D_0 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < (2\varepsilon')^2\} \ .$$

Mit Hilfssatz 2, §3 folgern wir

$$\tilde{\mathbf{x}}(U) \subset D_0 \ ,$$

wobei wir das im Hilfssatz 2, §3 auftretende h durch $\frac{1}{2\varepsilon'}$ ersetzen. Wir leiten daraus

$$|\mathbf{x}^n(w_1) - \mathbf{x}^n(w_2)| = |\tilde{\mathbf{x}}(w_1) - \tilde{\mathbf{x}}(w_2)| \leq |\tilde{\mathbf{x}}(w_1)| + |\tilde{\mathbf{x}}(w_2)| \leq 4\varepsilon \quad \text{für } w_1, w_2 \in U \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

ab. Beachten wir nun noch, dass $U = \{w \in \overline{B} \mid |w - w_0| \leq \delta^*\}$ für ein beliebiges $w_0 \in \overline{B}$ gesetzt war, so können wir die Ergebnisse wie folgt zusammen: Zu jedem $0 < \varepsilon < \min(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2h})$ finden wir ein $\delta(\varepsilon)$, so dass es für jedes $w_0 \in \overline{B}$ ein $\delta^*(w_0) \geq \delta$ gibt, für welches die Abschätzung

$$|\mathbf{x}^n(w_0) - \mathbf{x}^n(w_1)| \leq 4\varepsilon \quad \text{für alle } w_1 \in \overline{B} \text{ mit } |w_0 - w_1| \leq \delta^* \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

richtig ist. Daraus folgern wir: Zu jedem $0 < \varepsilon < \min(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2h})$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so dass für alle $w_0, w_1 \in \overline{B}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$|w_0 - w_1| \leq \delta \ \Rightarrow \ |\mathbf{x}^n(w_0) - \mathbf{x}^n(w_1)| \leq 4\varepsilon$$

gültig ist. Somit ist die gleichgradige Stetigkeit der Folge $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1,2,\dots}$ nachgewiesen.

3.) Wir können nun Hilfssatz 2 anwenden, welcher eine Konstante C_1 unabhängig von n liefert mit

$$||\mathbf{x}^n||^B_{1+\frac{1}{2}\alpha} \leq C_1 \ .$$

Mit dem Auswahlsatz von Arzela-Ascoli finden wir damit eine Teilfolge von $\mathbf{x}^n$, welche wir der Einfachheit halber weiterhin als $\mathbf{x}^n$ bezeichnen, für welche die Konvergenz

$$\mathbf{x}^n \ \to \ \mathbf{x} \quad \text{in } C^1(\overline{B}) \text{ für } n \to \infty$$

mit der Grenzfunktion

$$\mathbf{x}(w) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n(w) \in C^{1+\frac{1}{2}\alpha}(\overline{B})$$

richtig ist. Weiterhin liefert Hilfssatz 2 zu jedem $0 < r < 1$ eine Konstante $C_2(r)$ unabhängig von n, so dass die innere Abschätzung

$$||\mathbf{x}^n||^{B_r}_{2+\alpha} \leq C_2(r)$$

gültig ist. Zu jedem $r < 1$ finden wir somit eine Teilfolge von $\mathbf{x}^n$, welche

$$\mathbf{x}^n \ \to \ \mathbf{x} \quad \text{in } C^2(B_r) \text{ für } n \to \infty$$

erfüllt. Nun genügt $\mathbf{x}^n$ in B_r den folgenden Differentialgleichungen

$$\triangle \mathbf{x}^n = 2H^n(\mathbf{x}^n)\mathbf{x}^n_u \wedge \mathbf{x}^n_v \quad \text{sowie} \quad |\mathbf{x}^n_u|^2 - |\mathbf{x}^n_v|^2 = 0 = \mathbf{x}^n_u \cdot \mathbf{x}^n_v \ .$$

Wegen der obigen Konvergenz genügt dann ebenfalls $\mathbf{x}$ den Gleichungen

$$\triangle \mathbf{x} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{sowie} \quad |\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 = 0 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \quad \text{in } B_r \ .$$

Dies ist richtig für jedes $r < 1$, somit ist $\mathbf{x} \in C^{2+\alpha}(B) \cap C^{1+\frac{1}{2}\alpha}(\overline{B})$ in ganz B eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H in konformen Parametern. Setzen wir nun $\mathbf{x}(w) = (x(w), y(w), z(w))$, so erklären wir hiermit die Ebenenabbildung von $\mathbf{x}$ durch $f(w) = (x(w), y(w)) = x(w) + iy(w)$. Aus (5.28) folgern wir für diese

$$J_f(w) \geq 0 \quad \text{für } w \in \overline{B} \ .$$

4.) Wir zeigen nun, dass $f : B \to \Omega$ ein $C^{2+\alpha}$-Diffeomorphismus ist. Es gilt zunächst

$$f(\partial B) \subset \partial\Omega \ . \tag{5.34}$$

Um dies einzusehen, wählen wir ein $(u_0, v_0) \in \partial B$. Es ist $f^n(u_0, v_0) \in \partial\Omega^n$ richtig, denn die Abbildungen f^n sind Diffeomorphismen. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von f^n sowie $\partial\Omega^n \to \partial\Omega$ folgern wir $f(u_0, v_0) \in \partial\Omega$, womit die Behauptung bewiesen ist. Wir verwenden nun Eigenschaften des Abbildungsgrades und verweisen dazu auf Kap. IX in [6]. Da die Abbildungen $f^n : \overline{B} \to \overline{\Omega}^n \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ positiv orientierte Diffeomorphismen sind, gilt

$$\deg(f^n, B, z_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_0 \in \Omega^n \\ 0 & \text{für } z_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}^n \ . \end{cases} \tag{5.35}$$

Dies sieht man sofort aus der Definition des Abbildungsgrades (Kap. IX, §2, Definition 1) zusammen mit der Transformationsformel ein. Eine entsprechende Aussage zeigen wir nun auch für f. Sei dazu $z_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \partial\Omega$ beliebig gewählt. Wegen $\partial\Omega^n \to \partial\Omega$ finden wir zunächst ein $n_0 = n_0(z_0) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Äquivalenz

$$z_0 \in \Omega^n \;\Leftrightarrow\; z_0 \in \Omega \tag{5.36}$$

gilt. Wir setzen nun

$$\varepsilon := \inf_{w \in \partial B} |z_0 - f(w)| \,,$$

und folgern aus (5.34) $\varepsilon > 0$. Mit der gleichmäßigen Konvergenz von f^n ermitteln ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n_0$ sowie

$$|f^k(w) - f(w)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{für } w \in \overline{B} \,.$$

Aus der Definition von ε ergibt sich weiterhin

$$|f(w) - z_0| \geq \varepsilon \quad , \; w \in \partial B \,.$$

Wir können daher Satz 4, §2, Kap. IX aus [6] anwenden, welcher

$$\deg(f^k, B, z_0) = \deg(f, B, z_0)$$

liefert. Zusammen mit (5.36) und (5.35) schließen wir

$$\deg(f, B, z_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_0 \in \Omega \\ 0 & \text{für } z_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega} \,. \end{cases} \tag{5.37}$$

Für ein beliebiges $z_0 \in \Omega$ gilt daher

$$1 = \deg(f, B, z_0) = \int_B \omega(|f(u,v) - z_0|) J_f(u,v)\, du dv \,, \tag{5.38}$$

wobei wir die Definition des Abbildungsgrades anwenden. Die Testfunktion $\omega \in C^0([0, +\infty))$ ist gemäß den Voraussetzungen der Definition zu wählen. Da nun $J_f(u,v) \geq 0$ gilt, muss es wegen (5.38) ein $(u_0, v_0) \in B$ geben mit $J_f(u_0, v_0) > 0$. Mittels einer Möbiustransformation können wir dann ohne Einschränkung $J_f(0,0) > 0$ annehmen. Der Hilfssatz 3, §4 liefert nun

$$J_f(u,v) > 0 \quad \text{in } B \,. \tag{5.39}$$

Daher besitzt jedes $z_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \partial\Omega$ nur endlich viele Urbilder unter f, den die Urbilder können sich weder in B noch auf ∂B häufen. Es seien also $w_1, ..., w_N \in B$ mit $f(w_j) = z_0$ alle Urbilder von z_0 gegeben. Hierbei ist $N \in \{0, 1, 2, ...\}$. Die Indexsummenformel für den Abbildungsgrad liefert dann

$$\deg(f, B, z_0) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sgn} J_f(w_j) = \sum_{j=1}^{N} 1 = N \,.$$

Da nun N die Anzahl der Urbilder von z_0 ist, folgern wir zusammen mit (5.37), dass jedes $z_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$ kein Urbild unter f besitzt und $z_0 \in \Omega$ genau ein Urbild. Somit gilt $\Omega \subset f(B) \subset \overline{\Omega}$ und zusammen mit (5.39) schließen wir $f(B) = \Omega$, denn f bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. Damit ist die Abbildung $f : B \to \Omega$ eine injektive Abbildung, insbesondere ist

$$\mathbf{x}(B) \subset Z_\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Omega\} \tag{5.40}$$

richtig. Wegen (5.39) liefert der Satz über die inverse Abbildung, dass $f : B \to \Omega$ ein $C^{2+\alpha}$-Diffeomorphismus ist.

5.) Wir müssen nun noch das Randverhalten von $\mathbf{x}$ untersuchen. Dazu zeigen wir zunächst, dass $\mathbf{x}(\partial B) = \Gamma$ gilt. Sei dazu ein $w_0 \in \partial B$ gewählt. Wegen $\mathbf{x}^n(w_0) \in \Gamma^n$ sowie $\Gamma^n \to \Gamma$ folgt $\mathbf{x}(w_0) \in \Gamma$, womit also $\mathbf{x}(\partial B) \subset \Gamma$ gilt. Sei nun $p \in \Gamma$ gewählt. Wir finden zunächst eine Folge $\{w_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \partial B$ mit $\mathbf{x}^n(w_n) \to p$ für $n \to \infty$. Nach Auswahl einer konvergenten Teilfolge folgt dann $w_n \to w_0 \in \partial B$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\mathbf{x}^n$ schließen wir $\mathbf{x}^n(w_n) \to \mathbf{x}(w_0) = p$. Somit ist $\Gamma \subset \mathbf{x}(\partial B)$ gezeigt und die Behauptung bewiesen. Die Fläche $\mathbf{x}$ spannt sich somit in die Randkurve Γ ein. Wegen (5.40) dürfen wir den Satz 1 aus §4 verwenden. Dieser liefert

$$J_f(u, v) > 0 \quad \text{für } (u, v) \in \partial B\ . \tag{5.41}$$

Verwenden wir nun erneut den Satz über die inverse Abbildung zusammen mit (5.41), so folgt, dass $f : \overline{B} \to \overline{\Omega} \in C^{2+\alpha}(B) \cap C^{1+\frac{1}{2}\alpha}(\overline{B})$ ein Diffeomorphismus ist.

6.) Erklären wir nun die Höhendarstellung

$$\zeta(x, y) := z \circ f^{-1}(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \overline{\Omega}\ ,$$

so löst diese das Randwertproblem für die H-Flächengleichung in nichtparametrischer Form zu den Randwerten g, es gilt also

$$\begin{aligned}
&\zeta \in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C^{1+\frac{1}{2}\alpha}(\overline{\Omega})\\
&(1 + \zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1 + \zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(x, y, \zeta(x, y))(1 + |\nabla\zeta|^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega\\
&\zeta(x, y) = g(x, y) \quad \text{auf } \partial\Omega\ .
\end{aligned}$$

Ein Randregularitätssatz aus der Schaudertheorie (z.B. Satz 4, §6, Kap. XV in [9]) liefert nun $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, und somit ist alles gezeigt. q.e.d.

§6 Die Kontinuitätsmethode

Zu dem Parameter $t \in [0, 1]$ betrachten wir auf Gebieten Ω^t mit Randverteilungen $g^t : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ das Problem $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(\Omega^t, g^t)$ der H-Flächengleichung in nichtparametrischer Form

$$\begin{aligned}
&\zeta = \zeta(u, v) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^t)\\
&(1 + \zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1 + \zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(x, y, \zeta(x, y))(1 + |\nabla\zeta|^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega^t\\
&\zeta(x, y) = g^t(x, y) \quad \text{auf } \partial\Omega^t\ .
\end{aligned} \tag{6.1}$$

An die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$ stellen wir die Voraussetzungen

$$\sup_{(x,y,z)\in Z_{2h}} |H(x, y, z)| \le h \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z} \ge 0 \quad \text{für } (x, y, z) \in Z_{2h}\ . \tag{6.2}$$

Von den Grundgebieten Ω^t und die Randfunktionen g^t fordern wir folgendes.

Definition 1 : Zu $t \in [0,1]$ betrachten wir die Schar von Kurven

$$\Gamma^t := \{(x, y, g^t(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \partial\Omega^t\} \ .$$

Diese bezeichnen wir als zulässig, falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

1.) Die Projektionsgebiete $\Omega^t \subset \mathbb{R}^2$ der Randkurven Γ^t seien $2h$-konvexe Gebiete für jedes $t \in [0,1]$.

2.) Es gebe eine Funktion

$$\gamma^t(w) = \gamma(w,t) : \partial B \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \in C^{2+\alpha}(\partial B \times [0,1]) \ ,$$

so dass für jedes feste $t \in [0,1]$ die Abbildung $w \mapsto \gamma^t(w)$ eine reguläre Parametrisierung der Kurve Γ^t sei.

3.) Die Funktion $\gamma^t(w)$ sei für jedes $t \in [0,1)$ reell analytisch in w.

Satz 1 : *Die Schar von Randkurven Γ^t sei zulässig im Sinne von Definition 1. Zu einem $t_* \in [0,1)$ besitze das Problem $\mathcal{P}(t_*)$ eine Lösung. Weiterhin sei die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$ reell analytisch in einer offenen Umgebung der Randkurve Γ^{t_*}. Dann gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(t_*) > 0$, so dass das Problem $\mathcal{P}(t)$ für alle $t \in (t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon) \cap [0,1]$ eine Lösung besitzt.*

Beweis:
Gemäß Voraussetzung besitzt das Problem (6.1) für t_* eine Lösung ζ^{t_*}. Wir führen zunächst auf der Fläche ζ^{t_*} konforme Parameter ein. Dazu ermitteln wir mit Satz 1 aus §5 einen positiv orientierten Diffeomorphismus $f : \overline{B} \to \overline{\Omega}^{t_*}$ derart, dass die Fläche

$$\mathbf{x}(u,v) := (f(u,v), \zeta^{t_*} \circ f(u,v)) \in C^{2+\alpha}(\overline{B}) \tag{6.3}$$

in konformen Parametern vorliegt. Sie genügt dann also

$$\begin{aligned} &\triangle \mathbf{x} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{in } B \\ &|\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 = 0 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \quad \text{in } B \\ &\mathbf{x}(\partial B) = \Gamma^{t_*} \ . \end{aligned}$$

Weiterhin gilt die Abschätzung

$$(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot e_3 = J_f(u,v) > 0 \quad \text{in } \overline{B} \ . \tag{6.4}$$

Mit potentialtheoretischen Mitteln schließen wir zunächst aus $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$ die Regularität $\mathbf{x} \in C^{3+\alpha}(B)$. Nun spannt sich $\mathbf{x}$ in die reell analytische Randkurve Γ^{t_*} ein. Weiterhin ist die vorgeschriebene mittlere Krümmung H reell analytisch in einer Umgebung von Γ^{t_*}. Mit Hilfe der Arbeit von F. Müller (vgl. [3], Satz 4.1) lässt sich die Fläche $\mathbf{x}$ reell analytisch über den Rand ∂B hinweg als Lösung der H-Flächengleichung fortsetzen und ist in einer Umgebung des Randes ∂B reell analytisch. Unter Beachtung von (6.4) können wir dann ein $B' \subset \mathbb{R}^2$ mit $B \subset\subset B'$ ermitteln, so dass die Aussagen

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) : B' \to \mathbb{R}^3 \in C^{3+\alpha}(\overline{B}') \\ &\triangle \mathbf{x} = 2H(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \quad \text{in } B' \\ &|\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 = 0 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \quad \text{in } B' \end{aligned}$$

sowie

$$(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot e_3 > 0 \quad \text{in } \overline{B}' \tag{6.5}$$

gelten. Wir betrachten nun die Hilfsfunktion

$$Y(u,v,\varphi) : B' \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ , \ Y(u,v,\varphi) := \mathbf{x}(u,v) + \varphi \mathbf{X}(u,v) \quad \text{für } (u,v,\varphi) \in B' \times \mathbb{R} \ .$$

Wir bemerken, dass $Y \in C^{2+\alpha}(B' \times \mathbb{R})$ gilt. Für die Funktionaldeterminante von Y ergibt sich

$$J_Y = (Y_u \wedge Y_v) \cdot Y_\varphi = (\mathbf{x}_u + \varphi \mathbf{X}_u) \wedge (\mathbf{x}_v + \varphi \mathbf{X}_v) \cdot \mathbf{X} \ ,$$

und wir bemerken, dass

$$J_Y(u,v,0) = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{X} = |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| > 0 \quad \text{für } (u,v) \in B'$$

richtig ist. Der Satz über die inverse Abbildung zusammen mit die Injektivität von $\mathbf{x}$ liefert zunächst ein $\delta > 0$, so dass $Y : B' \times (-\delta, \delta) \to V$ bijektiv ist. Hierbei ist $V := Y(B' \times (-\delta, \delta)) \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Insbesondere gilt

$$\mathbf{x}(\partial B) \subset V \ .$$

Wir bezeichnen die Inverse von Y mit

$$Y^{-1}(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), \varphi(x,y,z)) \in C^{2+\alpha}(V) \ .$$

Es gilt die Gleichung

$$\mathbf{x}(u(p), v(p)) + \varphi(p) \mathbf{X}(u(p), v(p)) = p \quad \text{für alle } p \in V \ . \tag{6.6}$$

Aus

$$\varphi(p) = 0 \quad \text{für } p \in \mathbf{x}(B')$$

leiten wir weiter

$$(u \circ \mathbf{x}(w), v \circ \mathbf{x}(w)) = w \quad \text{für } w \in B' \tag{6.7}$$

ab. Nun sind die Randkurven Γ^t parametrisiert durch

$$\gamma^t(w) = \gamma(w,t) : \partial B \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \in C^{2+\alpha}(\partial B \times [0,1])$$

mit der Eigenschaft $\gamma^t(\partial B) = \Gamma^t$. Da V eine offene Menge ist, können wir wegen $\Gamma^{t_*} \subset V$ ein $\varepsilon_1 > 0$ so ermitteln, dass

$$\Gamma^t \subset V \quad \text{für alle } t \in (t_* - \varepsilon_1, t_* + \varepsilon_1)$$

richtig ist. Wir erklären wir nun die Kurven

$$\begin{aligned} &\beta^t(w) = \beta(w,t) : \partial B \times (t_* - \varepsilon_1, t_* + \varepsilon_1) \to \mathbb{R}^2 \in C^{2+\alpha}(\partial B \times (t_* - \varepsilon_1, t_* + \varepsilon_1)) \\ &\beta^t(w) := (u \circ \gamma^t(w), v \circ \gamma^t(w)) \quad \text{für } w \in \partial B \text{ und } \ t \in (t_* - \varepsilon_1, t_* + \varepsilon_1) \ . \end{aligned}$$

Ersetzen wir in (6.6) p durch $\gamma^t(w)$, so folgt

$$\mathbf{x}(\beta^t(w)) + \varphi(\gamma^t(w)) \mathbf{X}(\beta^t(w)) = \gamma^t(w) \quad \text{für alle } w \in \partial B \ . \tag{6.8}$$

Aus (6.7) folgern wir, dass $\beta^{t_*} : \partial B \to \partial B$ injektiv ist und die Inverse

$$(\beta^{t_*})^{-1}(w) = (\gamma^{t_*})^{-1} \circ \mathbf{x}(w) \in C^{2+\alpha}(\partial B)$$

besitzt. Wir werden nun zeigen, dass ebenfalls die Abbildungen β^t injektiv sind, falls wir t hinreichend nahe an t_* wählen. Dazu erklären wir für $t \in (t_* - \varepsilon_1, t_* + \varepsilon_1)$ Abbildungen $h^t : \overline{B} \to \mathbb{R}^2$ als Lösung des folgenden Dirichlet-Randwertproblemes

$$\begin{aligned}&\triangle h^t = 0 \quad \text{in } B\\ &h^t(w) = \beta^t \circ (\beta^{t_*})^{-1}(w) \quad \text{auf } \partial B\ .\end{aligned}$$

Wegen der Schaudertheorie besitzt dieses Problem stets eine eindeutige Lösung $h^t \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$. Wir beachten weiter, dass

$$h^{t_*}(w) = \mathrm{id}(w) = w \quad \text{in } \overline{B}$$

richtig ist. Die Schauderabschätzung aus Hilfssatz 1, §7 liefert eine Konstante $C(\alpha) < +\infty$ mit

$$\begin{aligned}||h^t - \mathrm{id}||_{2+\alpha}^{B} &\leq C(\alpha)||h^t - \mathrm{id}||_{2+\alpha}^{\partial B}\\ &= C(\alpha)||\beta^t \circ (\beta^{t_*})^{-1} - \mathrm{id}||_{2+\alpha}^{\partial B} \to 0 \quad \text{für } t \to t_*\ .\end{aligned}$$

Daher können wir ein $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ angeben, so dass h^t injektiv sind und

$$J_{h^t}(w) > 0 \quad \text{für alle } w \in \overline{B}$$

für $t \in (t_* - \varepsilon_2, t_* + \varepsilon_2)$ richtig ist. Mit dem Satz über die inverse Abbildung sind dann $h^t : \overline{B} \to \overline{B}^t$ Diffeomorphismen der Klasse $C^{2+\alpha}$, wobei wir die offenen Mengen $B^t := h^t(B)$ erklärt haben. Wir können ebenfalls erreichen, dass für $|t - t_0|$ hinreichend klein die Mengen B^t konvexe Mengen sind, denn die Menge $B^{t_*} = B$ ist eine konvexe Menge. Wegen der Konvergenz $h^t \to id$ in $C^{2+\alpha}(\overline{B})$ können wir weiterhin ein $L < +\infty$ unabhängig von t ermitteln, so dass

$$||h^t||_{2+\alpha}^{B} \leq L \quad \text{und} \quad ||(h^t)^{-1}||_{2+\alpha}^{B^t} \leq L \tag{6.9}$$

richtig ist. Da nun die Inversen $(\beta^t)^{-1} : \partial B^t \to \partial B \in C^{2+\alpha}(\partial B^t)$ existieren, können wir in (6.8) w durch $(\beta^t)^{-1}(w)$ ersetzen und erhalten so

$$\mathbf{x}(w) + \tilde{\varphi}^t(w)\mathbf{X}(w) = \gamma^t \circ (\beta^t)^{-1}(w) \quad \text{für alle } w \in \partial B^t\ . \tag{6.10}$$

Hierbei haben wir

$$\tilde{\varphi}^t(w) := \varphi \circ \gamma^t \circ (\beta^t)^{-1}(w) \in C^{2+\alpha}(\partial B^t)$$

erklärt. Es ist $\tilde{\varphi}^{t_*} \equiv 0$ richtig, und daher gilt

$$||\tilde{\varphi}^t||_{2+\alpha}^{B^t} \to 0 \quad \text{für } t \to t_*\ .$$

Wir beachten, dass die rechte Seite aus (6.10), $\gamma^t \circ (\beta^t)^{-1}(w)$, für $w \in \partial B^t$ eine Parametrisierung der Randkurve Γ^t darstellt.
Zu einer Funktion $\eta^t = \eta^t(u, v) \in C^{2+\alpha}(\overline{B}^t)$, welche die Randwerte

$$\eta^t(w) = \tilde{\varphi}^t(w) \quad \text{auf } \partial B^t$$

besitzt, betrachten wir nun die Variation der Fläche $\mathbf{x}$ in Richtung der Normale

$$\mathbf{x}^t(w) := \mathbf{x}(w) + \eta^t(w)\mathbf{X}(w) \quad \text{für } w \in \overline{B}^t\ .$$

Wir bemerken, dass sich die Fläche $\mathbf{x}^t$ wegen (6.10) in die Randkurve Γ^t einspannt, das heisst $\mathbf{x}^t(\partial B^t) = \Gamma^t$. Beachten wir (6.9), so können wir mit Satz 1 aus §2 zu jedem

$t \in (t_* - \varepsilon_3, t_* + \varepsilon_3)$ ein η^t derart ermitteln, dass die Fläche $\mathbf{x}^t$ erneut eine Fläche der vorgeschrieben mittleren Krümmung H ist. Dazu haben wir $0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$ gemäß dieses Satzes hinreichend klein zu wählen. Weiterhin genügt dieses η^t der Abschätzung

$$||\eta^t||_{2+\alpha}^{B^t} \leq C||\eta^t||_{2+\alpha}^{\partial B^t} = C||\tilde{\varphi}^t||_{2+\alpha}^{\partial B^t} \to 0 \quad \text{für } t \to t_* \tag{6.11}$$

mit einem im Satz 1 angegebenen C unabhängig von t. Daraus leiten wir die Konvergenz

$$\mathbf{x}^t \;\to\; \mathbf{x}^{t_*} = \mathbf{x} \quad \text{in } C^{2+\alpha}(B^t) \text{ für } t \to t_*$$

ab. Aus dieser Konvergenz zusammen mit (6.4) ermitteln wir ein $0 < \varepsilon_4 \leq \varepsilon_3$, so dass

$$\mathbf{x}_u^t \wedge \mathbf{x}_v^t \cdot e_3 > 0 \quad \text{in } \overline{B}^t$$

für alle $t \in (t_* - \varepsilon_4, t_* + \varepsilon_4)$ richtig ist. Setzen wir $\mathbf{x}^t(u,v) = (x^t(u,v), y^t(u,v), z^t(u,v))$, so erklären wir die Ebenenabbildungen $f^t(u,v) = (x^t(u,v), y^t(u,v))$. Diese erfüllen nun

$$J_{f^t} > 0 \quad \text{in } \overline{B}^t.$$

Wegen (6.3) ist die Abbildung f^{t_*} injektiv, somit sind ebenfalls alle $f^t : \overline{B} \to \mathbb{R}^2$ injektive Abbildungen für $t \in (t_* - \varepsilon_5, t_* + \varepsilon_5)$ mit hinreichend klein zu wählenden $0 < \varepsilon_5 \leq \varepsilon_4$. Mit dem Satz über die inverse Abbildung sind dann $f^t : \overline{B} \to \overline{\Omega}^t$ Diffeomorphismen der Klasse $C^{2+\alpha}$. Die Höhendarstellung

$$\zeta^t(x,y) : \overline{\Omega}^t \to \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^t) \quad \text{mit} \quad \zeta^t(x,y) := z^t \circ (f^t)^{-1}(x,y) \quad , \ (x,y) \in \overline{\Omega}^t$$

ist nun die gesuchte Lösung des Problemes (6.1). q.e.d.

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieser Arbeit, der Kontinuitätsmethode.

Satz 2 : *Gegeben seien die 2h-konvexen Grundgebiete Ω^t sowie die Randverteilungen $g^t : \partial\Omega^t \to \mathbb{R} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega^t)$, welche die Bedingungen von Definition 1 erfüllen. Die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$ genüge den Voraussetzungen (6.2) und sei zusätzlich reell analytisch in einer Umgebung jeder Randkurve Γ^t für jedes $t \in [0,1)$.*
Behauptung: Falls das Problem $\mathcal{P}(0)$ eine Lösung besitzt, so besitzt ebenfalls das Problem $\mathcal{P}(t)$ eine Lösung $\zeta^t \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^t)$ für jedes $t \in [0,1]$.

Beweis:
1.) Es besitze das Problem $\mathcal{P}(0)$ eine Lösung ζ^0. Mit Satz 1 ermitteln wir ein $\varepsilon > 0$, so dass $\mathcal{P}(t)$ lösbar ist für alle $t \in [0, \varepsilon)$.

2.) Wir erklären nun

$$t_0 := \sup\{t \in [0,1] \mid \mathcal{P}(s) \text{ besitzt eine Lösung für alle } s \in [0,t]\}$$

und beachten, dass wegen 1.) $t_0 > 0$ richtig ist. Wir wählen nun eine beliebige Folge $\{t_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset [0,1]$ mit den Eigenschaften $0 \leq t_n < t_0$ und $t_n \to t_0$ für $n \to +\infty$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung $\zeta^{t_n} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^t)$ des Problemes $\mathcal{P}(t_n)$. Mit Satz 2 aus §5 gibt es dann ebenfalls eine Lösung $\zeta = \zeta^{t_0} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^{t_0})$ des Problemes $\mathcal{P}(t_0)$.
Falls nun $t_0 < 1$ richtig ist, so können wir erneut wie im Schritt 1.) $\varepsilon = \varepsilon(t_0)$ ermitteln, so dass das Problem $\mathcal{P}(t)$ für alle $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$ lösbar ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definiton von t_0. Wir schließen daraus, dass $t_0 = 1$ richtig ist und der Satz ist somit bewiesen. q.e.d.

Bemerkung: Die Voraussetzung, dass H reell analytisch ist in einer Umgebung jeder Randkurve Γ^t benötigt man, um die für jedes $t \in [0,1)$ die konform parametrisierte Lösung des Problemes $\mathcal{P}(t)$ reell analytisch über den Rand hinweg fortsetzen zu können, wie im Satz 1 beschrieben. Falls wir von der konform parametrisierten Lösung $\mathbf{x}^0$ des Problemes $\mathcal{P}(0)$ explizit wissen, dass diese sich über den Rand hinweg als Lösung der H-Flächengleichung fortsetzen lässt, reicht es also aus, H reell analytisch zu fordern in einer Umgebung jeder Randkurve Γ^t für $t \in (0,1)$.

§7 Schauderabschätzungen am Rande

In diesem Paragraphen wollen wir die bereits benutzten Schauderabschätzungen mit Randwerten herleiten. In [9], Kap. XV, §7 werden Schauderabschätzungen für elliptische Operatoren hergeleitet, jedoch nur unter der Voraussetzung von Null-Randwerten. Diese Voraussetzung wollen wir eliminieren.

Definition 1 : Für eine Funktion $h \in C^{k+\alpha}(\partial B)$ mit $k \in \{0,1,2,...\}$ und $\alpha \in (0,1)$ erklären wir die Norm

$$||h||_{k+\alpha}^{\partial B} := ||g||_{k+\alpha}^{\mathbb{R}}$$

mit Hilfe der Funktion

$$g(\varphi) := h(e^{i\varphi}) \quad \text{für } \varphi \in \mathbb{R}\ .$$

Wir benötigen zunächst

Hilfssatz 1 : *In der Einheitskugel $B := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\} \subset \mathbb{C}$ sei eine Funktion $h \in C^{1+\alpha}(\overline{B})$ gegeben, welche in B harmonisch sei. Dann gibt es eine Konstante $C_1 = C_1(\alpha)$ mit*

$$||h||_{1+\alpha}^{B} \le C_1 ||h||_{1+\alpha}^{\partial B}\ .$$

Falls zusätzlich $h \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ richtig ist, so gibt es es ein $C_2 = C_2(\alpha)$ mit

$$||h||_{2+\alpha}^{B} \le C_2 ||h||_{2+\alpha}^{\partial B}\ .$$

Beweis:
Wir betrachten zunächst das Schwarzsche Integral

$$f(w) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+w}{e^{i\varphi}-w} h(e^{i\varphi})\,d\varphi \quad \text{für } w \in B\ . \tag{7.1}$$

Die Funktion f ist holomorph in B und wegen der Schwarzschen Integralformel (siehe [9], Kap. XV, §2, Satz 2) stetig auf $\overline{B}$ fortsetzbar. Ihr Realteil genügt der Randbedingung

$$\mathrm{Re} f(w) = h(w) \quad \text{auf } \partial B\ . \tag{7.2}$$

Da nun sowohl $\mathrm{Re} f$ als auch h harmonische Funktionen sind, welche wegen (7.2) die selben Randwerte besitzen, folgern wir mit dem Maximumprinzip

$$\mathrm{Re} f(w) = h(w) \quad \text{in } \overline{B}\ . \tag{7.3}$$

Setzen wir nun $h^*(w) := \mathrm{Im} f(w)$, so erhalten wir die Darstellung

$$f(w) = h(w) + ih^*(w) \quad \text{in } \overline{B}\ .$$

Die Ableitung von f berechnen wir zu

$$\begin{aligned} f'(w) &= \frac{1}{2}(h+ih^*)_u - \frac{1}{2}i(h+ih^*)_v = \frac{1}{2}(h_u + ih_u^* - ih_v + h_v^*) \\ &= \frac{1}{2}(h_u - ih_v - ih_v + h_u) = h_u - ih_v \, , \end{aligned} \tag{7.4}$$

wobei wir die Cauchy-Riemannschen Gleichungen für h und h^* angewendet haben. Für die zweite Ableitung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} f''(w) &= \frac{1}{2}(h_u - ih_v)_u - \frac{1}{2}i(h_u - ih_v)_v = \frac{1}{2}(h_{uu} - ih_{uv} - ih_{uv} - h_{vv}) \\ &= \frac{1}{2}(h_{uu} - 2ih_{uv} + h_{uu}) = h_{uu} - ih_{uv} \, . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Hierbei haben wir $\triangle h = h_{uu} + h_{vv} = 0$ ausgenutzt. Mit dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen gilt zunächst die Abschätzung

$$||h||_0^B = \sup_{w \in B} |h(w)| \leq \sup_{w \in \partial B} |h(w)| = ||h||_0^{\partial B} \, .$$

Um nun die im Satz behaupteten Abschätzungen zu zeigen, müssen wir nur noch wegen (7.4) und (7.5) die Normen $||f'||_\alpha^B$ sowie $||f''||_\alpha^B$ abschätzen. Wir erklären dazu die beiden Gebiete

$$B_1 := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \frac{2}{3}\} \quad \text{und} \quad B_2 := \{w \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{3} < |w| < 1\}$$

und beachten $B = B_1 \cup B_2$ sowie $B_1 \subset\subset B$. Es reicht daher aus, die Abschätzung getrennt jeweils in B_1 und B_2 zu erbringen.

1.) Wir liefern zunächst die entsprechende Abschätzung in B_1. Hierzu differenzieren wir die Integraldarstellung (7.1) und erhalten

$$\begin{aligned} f'(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi} - w)^2} h(e^{i\varphi}) d\varphi \quad \text{sowie} \\ f''(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{4e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi} - w)^3} h(e^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned}$$

für alle $w \in B$. Damit können wir eine Konstante C_1 ermitteln, so dass

$$||f'||_\alpha^{B_1} + ||f''||_\alpha^{B_1} \leq C_1 ||h||_0^{\partial B}$$

richtig ist. Hierzu beachten wir, dass der in den Integralen auftretende Nenner der Abschätzung

$$|e^{i\varphi} - w| \geq 1 - |w| \geq 1 - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3} \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi] \text{ und } w \in B_1$$

genügt.

2.) Wir zeigen nun die Abschätzung in B_2. Dazu betrachten wir zunächst eine beliebige Funktion $\phi : \overline{B} \to \mathbb{C} \in C^\alpha(\overline{B})$, welche in B holomorph sei. Der Satz von Korn und Privalov (vgl. [1], Kap. 7.2, Lemma 6) liefert für ϕ die Hölderabschätzung

$$\sup_{\substack{w_1, w_2 \in B \\ w_1 \neq w_2}} \frac{|\phi(w_1) - \phi(w_2)|}{|w_1 - w_2|^\alpha} \leq C ||\mathrm{Re}\, \phi||_\alpha^{\partial B}$$

mit einer Konstante $C = C(\alpha)$. Falls wir zusätzlich $\phi(0) = 0$ voraussetzen, so können wir daraus die C^0-Abschätzung

$$\sup_{w\in B} |\phi(w)| \leq C||\mathrm{Re}\,\phi||_\alpha^{\partial B}$$

ableiten. Fassen wir diese beiden Abschätzungen zusammen, so ergibt sich

$$||\phi||_\alpha^B \leq ||\mathrm{Re}\,\phi||_\alpha^{\partial B} \ . \tag{7.6}$$

Wir führen nun Polarkoordinaten $w = re^{i\varphi}$ ein und differenzieren

$$f_\varphi(w) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial(re^{i\varphi})}{\partial \varphi} = f'(w)ire^{i\varphi} = iwf'(w) \ .$$

Wir beachten, dass $f_\varphi \in C^{1+\alpha}(\overline{B})$ holomorph in B ist und $f_\varphi(0) = 0$ gilt. Es gilt weiterhin

$$\mathrm{Re} f_\varphi = \frac{\partial h}{\partial \varphi} \ ,$$

woraus sich die Randbedingung

$$\mathrm{Re} f_\varphi(e^{i\varphi}) = \frac{\partial h(e^{i\varphi})}{\partial \varphi} \quad , \ \varphi \in \mathbb{R}$$

ergibt. Wir wenden daher (7.6) auf $\phi = f_\varphi$ an und erhalten

$$||f_\varphi||_\alpha^B \leq C||h||_{1+\alpha}^{\partial B} \ .$$

Innerhalb von B_2 können wir daraus die Abschätzung

$$||f'||_\alpha^{B_2} \leq ||\psi||_\alpha^{B_2}||iwf'||_\alpha^B = d||f_\varphi||_\alpha^B \leq dC||h||_{1+\alpha}^{\partial B}$$

erbringen. Hierbei haben wir $d := ||\psi||_\alpha^{B_2} < +\infty$ gesetzt mit $\psi(w) := \frac{1}{iw} \in C^\alpha(B_2)$.
Für $f_{\varphi\varphi}$ ermitteln wir

$$\begin{aligned} f_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial(f'(re^{i\varphi})ire^{i\varphi})}{\partial \varphi} = -re^{i\varphi}f'(r^{i\varphi}) - f''(re^{i\varphi})(re^{i\varphi})^2 \\ &= -wf'(w) - w^2f''(w) = if_\varphi(w) - w^2f''(w) \end{aligned}$$

Zunächst ist $f_{\varphi\varphi} \in C^\alpha(\overline{B})$ und holomorph in B. Weiterhin gilt $f_{\varphi\varphi}(0) = 0$. Für ihren Realteil leiten wir

$$\mathrm{Re}\, f_{\varphi\varphi}(w) = \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} \ ,$$

her, woraus sich die Randbedingung

$$\mathrm{Re}\, f_{\varphi\varphi}(e^{i\varphi}) = \frac{\partial^2 h(e^{i\varphi})}{\partial \varphi^2} \quad , \ \varphi \in \mathbb{R}$$

ergibt. Die Abschätzung (7.6) angewendet auf $\phi = f_{\varphi\varphi}$ liefert

$$||f_{\varphi\varphi}||_\alpha^B \leq C||h||_{2+\alpha}^{\partial B} \ . \tag{7.7}$$

Wir erklären wir nun die Funktion $\psi(w) := \frac{1}{w^2} \in C^\alpha(B_2)$ und $d := ||\psi||_\alpha^{B_2}$. Nun können wir f'' in $C^\alpha(B_2)$ wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} ||f''||_\alpha^{B_2} &\leq ||\psi||_\alpha^{B_2}||w^2f''||_\alpha^{B_2} \leq d||w^2f'' + wf' - wf'||_\alpha^{B_2} \\ &\leq d(||w^2f'' + wf'||_\alpha^{B_2} + ||wf'||_\alpha^{B_2}) = d(||f_{\varphi\varphi}||_\alpha^{B_2} + ||f_\varphi||_\alpha^{B_2}) \\ &\leq 2dC||h||_{2+\alpha}^{\partial B} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Dies liefert die notwendigen Abschätzung von f' und f'' in $C^\alpha(B_2)$ und der Satz ist damit bewiesen. q.e.d.

Auf einem $C^{2+\alpha}$-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir nun den Differentialoperator

$$\mathcal{L}u := \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_k} + \sum_{j=1}^{2} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \quad , \ x \in \Omega$$

für Funktionen $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Von den Koeffizienten $a_{jk}, b_j, c \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ fordern wir

$$\sum_{j,k=1}^{2} ||a_{jk}||_\alpha^\Omega + \sum_{j=1}^{2} ||b_j||_\alpha^\Omega + ||c||_\alpha^\Omega \leq H \tag{7.9}$$

mit einer Konstanten $H < +\infty$. Weiterhin sei $\mathcal{L}$ gleichmäßig elliptisch, das heißt, es gibt Konstanten $0 < m \leq M < +\infty$ mit

$$m|\lambda|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}(x)\lambda_j\lambda_k \leq M|\lambda|^2 \quad \text{für alle } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } x \in \overline{\Omega}\,. \tag{7.10}$$

In B zeigen wir zunächst folgende Schauderabschätzung.

Satz 1 : *Es sei der Operator $\mathcal{L}$ in B gegeben, welcher die Voraussetzungen (7.9) und (7.10) erfülle. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\alpha, m, M, H)$, so dass die Schauderabschätzung*

$$||u||_{2+\alpha}^B \leq C(||u||_0^B + ||\mathcal{L}u||_\alpha^B + ||u||_{2+\alpha}^{\partial B})$$

für alle $u \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ richtig ist.

Beweis:
Es sei ein beliebiges $u \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ gegeben. Mit der Schaudertheorie lösen wir zunächst folgendes Randwertproblem

$$\triangle h = 0 \quad \text{in } B \quad , \quad h = u \quad \text{auf } \partial B\,.$$

Dieses Problem besitzt stets eine eindeutige Lösung $h \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$. Wir betrachten nun die Funktion $\tilde{u} := u - h$, welche Nullrandwerte auf ∂B besitzt. Die Schauderschen Abschätzungen aus [9], Kap. XV, §7 liefern zunächst ein $C_1 = C_1(\alpha, m, M, H)$, so dass die Abschätzung

$$||\tilde{u}||_{2+\alpha}^B \leq C_1(||\tilde{u}||_0^B + ||\mathcal{L}\tilde{u}||_\alpha^B)$$

richtig ist. Weiterhin erhalten wir aus Hilfssatz 1 eine Konstante $C_2 = C_2(\alpha)$ mit

$$||h||_{2+\alpha}^B \leq C_2||h||_{2+\alpha}^{\partial B}\,.$$

Damit lässt sich u wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
||u||_{2+\alpha}^B &= ||\tilde{u} + h||_{2+\alpha}^B \leq ||\tilde{u}||_{2+\alpha}^B + ||h||_{2+\alpha}^B \\
&\leq C_1(||\tilde{u}||_0^B + ||\mathcal{L}\tilde{u}||_\alpha^B) + C_2||h||_{2+\alpha}^{\partial B} \\
&\leq C_1(||u||_0^B + ||h||_0^B + ||\mathcal{L}u||_\alpha^B + ||\mathcal{L}h||_\alpha^B) + C_2||h||_{2+\alpha}^{\partial B} \\
&\leq C_1(||u||_0^B + ||h||_0^{\partial B} + ||\mathcal{L}u||_\alpha^B + ||\mathcal{L}h||_\alpha^B) + C_2||u||_{2+\alpha}^{\partial B} \\
&\leq (C_1 + C_2)(||u||_0^B + ||\mathcal{L}u||_\alpha^B + ||\mathcal{L}h||_\alpha^B + ||u||_{2+\alpha}^{\partial B})\,.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Aus der Darstellung

$$\mathcal{L}h = \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{2} b_j(x) \frac{\partial h}{\partial x_j} + c(x)h$$

ermitteln wir eine Konstante $C_3 = C_3(H)$ mit

$$||\mathcal{L}h||_\alpha^B \leq C_3 ||h||_{2+\alpha}^B$$

und beachten, dass dann weiterhin

$$||\mathcal{L}h||_\alpha^B \leq C_3 ||h||_{2+\alpha}^B \leq C_3 C_1 ||h||_{2+\alpha}^{\partial B} = C_1 C_3 ||u||_{2+\alpha}^{\partial B}$$

gilt. Wir setzen diese Abschätzung in (7.11) und ermitteln eine Konstante $C = C(C_1, C_2, C_3)$ mit

$$||u||_{2+\alpha}^B \leq C(||u||_0^B + ||\mathcal{L}u||_\alpha^B + ||u||_{2+\alpha}^{\partial B}) \, .$$

q.e.d.

Satz 2 : *Gegeben sei ein konvexes $C^{2+\alpha}$-Gebiet Ω sowie ein Diffeomorphismus $h : \overline{B} \to \overline{\Omega}$ der Klasse $C^{2+\alpha}$. Auf Ω betrachten wir einen gleichmäßig elliptischen Operator $\mathcal{L}$ mit den Voraussetzungen (7.9) und (7.10). Weiterhin gebe es eine Konstante L mit*

$$||h||_{2+\alpha}^B \leq L \quad \text{und} \quad ||h^{-1}||_{2+\alpha}^\Omega \leq L \, . \tag{7.12}$$

Dann gibt es eine Konstante $C = C(\alpha, m, M, H, L)$, so dass die Schauderabschätzung

$$||u||_{2+\alpha}^\Omega \leq C(||u||_0^\Omega + ||\mathcal{L}u||_\alpha^\Omega + ||u||_{2+\alpha}^{\partial\Omega})$$

für alle $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ richtig ist. Hierbei erklären wir die Norm

$$||u||_{2+\alpha}^{\partial\Omega} := ||\psi||_{2+\alpha}^{\mathbb{R}}$$

mit Hilfe der Funktion $\psi(\varphi) := u \circ h(e^{i\varphi}) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R})$.

Beweis:
Wir bezeichnen zunächst die Inverse von h als $g(y) := h^{-1}(y) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Zu gegebenem $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ betrachten wir $\tilde{u}(y) := u \circ h(y) \in C^{2+\alpha}(\overline{B})$ und beachten $u(x) = \tilde{u} \circ g(x)$. Wir differenzieren u und erhalten

$$u_{x_j}(x) = \sum_{l=1}^{2} \tilde{u}_{y_l}(g(x)) \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x)$$

und weiter

$$u_{x_j x_k}(x) = \sum_{l,m=1}^{2} \tilde{u}_{y_l y_m}(g(x)) \frac{\partial g_l}{\partial x_j} \frac{\partial g_m}{\partial x_k}(x) + \sum_{l=1}^{2} \tilde{u}_{y_l}(g(x)) \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_j \partial x_k}(x) \quad , \; x \in \Omega \, .$$

Für $y \in B$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u)|_{x=h(y)} &= \Big\{ \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk} u_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{2} b_j u_{x_j} + cu \Big\}\Big|_{x=h(y)} \\
&= \sum_{l,m=1}^{2} \Big(\sum_{j,k=1}^{2} a_{jk} \frac{\partial g_l}{\partial x_j} \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \Big)\Big|_{x=h(y)} \tilde{u}_{y_l y_m} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2} \Big(\sum_{j,k=1}^{2} a_{jk} \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_j x_k} + \sum_{j=1}^{2} b_j \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \Big)\Big|_{x=h(y)} \tilde{u}_{y_l} + c|_{x=h(y)} \tilde{u} \\
&=: \sum_{l,m=1}^{2} \tilde{a}_{lm}(y) \tilde{u}_{y_l y_m} + \sum_{l=1}^{2} \tilde{b}_l(y) \tilde{u}_{y_l} + \tilde{c}(y)\tilde{u} =: \tilde{\mathcal{L}}\tilde{u}(y)
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Wir beachten, dass die Koeffizienten $\tilde{a}_{lm}, \tilde{b}_l, \tilde{c}$ des in (7.13) erklärten Differentialoperators $\tilde{\mathcal{L}}$ zur Klasse $C^\alpha(\overline{B})$ gehören. Weiterhin ermitteln wir aus den Voraussetzungen (7.9) und (7.12) eine Konstante $\tilde{H} = \tilde{H}(H, L)$ mit

$$\sum_{l,m=1}^{2} ||\tilde{a}_{lm}||_\alpha^B + \sum_{l=1}^{2} ||\tilde{b}_l||_\alpha^B + ||\tilde{c}||_\alpha^B \le \tilde{H} \ .$$

Außerdem können wir die Elliptizität des Operators $\mathcal{L}$ kontrollieren. Genauer bedeutet dies, dass wir aus (7.9) sowie (7.12) Konstanten $0 < \tilde{m} \le \tilde{M} < +\infty$ mit $\tilde{m} = \tilde{m}(m, L)$ und $\tilde{M} = \tilde{M}(M, L)$ angeben können mit

$$\tilde{m}|\lambda|^2 \le \sum_{l,m=1}^{2} \tilde{a}_{lm}(y)\lambda_l\lambda_m \le \tilde{M}|\lambda|^2 \quad \text{für } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } y \in \overline{B} \ .$$

Wegen Satz 1 gibt es nun eine Konstante $C_1 = C_1(\alpha, m, M, H, L)$, so dass die Schauderabschätzung

$$||\tilde{u}||_{2+\alpha}^B \le C(||\tilde{u}||_0^B + ||\tilde{\mathcal{L}}\tilde{u}||_\alpha^B + ||\tilde{u}||_{2+\alpha}^{\partial B})$$

richtig ist. Wegen der Konvexität von Ω lässt sich eine Konstante $C_2 = C_2(L)$ angeben, für welche die Ungleichung

$$||u||_{2+\alpha}^\Omega = ||\tilde{u} \circ g||_{2+\alpha}^\Omega \le C_2||\tilde{u}||_{2+\alpha}^B$$

gilt. Damit schätzen wir u wie folgt ab

$$\begin{aligned} ||u||_{2+\alpha}^\Omega &= ||\tilde{u} \circ g||_{2+\alpha}^\Omega \le C_2||\tilde{u}||_{2+\alpha}^B \\ &\le C_1C_2(||\tilde{u}||_0^B + ||\tilde{\mathcal{L}}\tilde{u}||_\alpha^B + ||\tilde{u}||_{2+\alpha}^{\partial B}) \ . \end{aligned} \tag{7.14}$$

Wir nutzen nun

$$\tilde{\mathcal{L}}\tilde{u}(y) = \mathcal{L}u(h(y)) \quad \text{für } y \in B \ ,$$

um die Abschätzung

$$||\tilde{\mathcal{L}}\tilde{u}||_\alpha^B = ||(\mathcal{L}u) \circ h||_\alpha^B \le ||\mathcal{L}u||_\alpha^\Omega ||h||_1^B \le L||\mathcal{L}u||_\alpha^\Omega$$

zu erbringen. Setzen wir diese in (7.14) ein und folgern

$$\begin{aligned} ||u||_{2+\alpha}^\Omega &\le C_1C_2(L+1)(||\tilde{u}||_0^B + ||\mathcal{L}u||_\alpha^\Omega + ||\tilde{u}||_{2+\alpha}^{\partial B}) \\ &= C_1C_2(L+1)(||u||_0^\Omega + ||\mathcal{L}u||_\alpha^\Omega + ||u||_{2+\alpha}^{\partial\Omega}) \ . \end{aligned}$$

q.e.d.

Speziell für den Laplace-Operator zeigen wir noch folgenden Satz, welchen wir bereits in §5 verwendet haben.

Satz 3 : *Zu jedem $\alpha \in (0,1)$ gibt es eine Konstante $C = C(\alpha)$, so dass für alle $u \in C^2(\overline{B})$ die Abschätzung*

$$||u||_{1+\alpha}^B \le C(||\triangle u||_0^B + ||u||_{1+\alpha}^{\partial B})$$

gilt.

Beweis:
Für $u \in C^2(\overline{B})$ gilt wegen der Poissonschen Integralformel zunächst die Darstellung

$$u(x) = h(x) + \tilde{u}(x) \quad , \; x \in B$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} h(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial B} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^2} u(y) d\sigma(y) \,, \\ \tilde{u}(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{B} \log \Big| \frac{y-x}{1-\overline{x}y} \Big| \triangle u(y) dy \,. \end{aligned}$$

Es erfüllt h die Differentialgleichung

$$\triangle h = 0 \quad \text{in } B \quad , \quad h = u \quad \text{auf } \partial B$$

und $\tilde{u}$ genügt

$$\triangle \tilde{u} = \triangle u \quad \text{in } B \quad , \quad \tilde{u} = 0 \quad \text{auf } \partial B.$$

Mit Hilfssatz 1 ermitteln wir zunächst eine Konstante $C_1 = C_1(\alpha)$ mit

$$||h||_{1+\alpha}^B \leq C_1 ||h||_{1+\alpha}^{\partial B} = C_1 ||u||_{1+\alpha}^{\partial B} \,.$$

Mit potentialtheoretischen Abschätzungen (vgl. [9], Kap. XV, §4) kann man eine Konstante $C_2 = C_2(\alpha)$ angeben, für welche

$$||\tilde{u}||_{1+\alpha}^B \leq C_2 ||\triangle \tilde{u}||_0^B = ||\triangle u||_0^B$$

richtig ist. Fassen wir diese beiden Aussagen zusammmen, so erhalten wir

$$||u||_{1+\alpha}^B \leq ||h||^{1+\alpha} + ||\tilde{u}||_{1+\alpha}^B \leq (C_1 + C_2)(||\triangle u||_0^B + ||u||_{1+\alpha}^{\partial B}) \,.$$

q.e.d.

§8 Anwendungen der Kontinuitätsmethode

Zu gegebener Konstante $h > 0$ betrachten wir den Zylinder

$$Z_{2h} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{4h^2}\}$$

sowie die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H : Z_{2h} \to \mathbb{R} \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$. Innerhalb einer Menge $\mathcal{O} \subset Z_{2h}$ erfülle H zusätzlich die Voraussetzungen

$$|H(x,y,z)| \leq h \quad \text{und} \quad \frac{\partial H(x,y,z)}{\partial z} \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{O} \,. \tag{8.1}$$

Wir zeigen zunächst

Satz 1 : *Die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$ sei reell analytisch im Zylinder Z_{2h} und erfülle außerdem in Z_{2h} die Voraussetzungen (8.1). Weiterhin sei ein $2h$-konvexes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einer reell analytischen Randkurve $\partial\Omega$ gegeben. Das Dirichletproblem der H-Flächengleichung in nichtparametrischer Form*

$$\begin{aligned} &\zeta = \zeta(u,v) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ &(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \textit{in } \Omega \\ &\zeta(x,y) = g(x,y) \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

besitze eine Lösung zu einer reell analytischen Randverteilung $g^0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Dann besitzt dieses Problem eine Lösung zu jeder reell analytischen Randfunktion $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$.

Beweis:
Es sei reell analytisches $g^0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ so gegeben, dass das Dirichletproblem zu diesen Randwerten eine Lösung besitze. Weiterhin sei ein beliebiges reell analytisches $g^1 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gewählt. Zu $t \in [0,1]$ betrachten wir nun die Schar von Randverteilungen

$$\tilde{g}^t(w) : \partial\Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad \tilde{g}^t(w) := (1-t)g^0(w) + tg^1(w) \quad \text{für } w \in \partial\Omega \, .$$

Es ist dann

$$\tilde{g}^k(w) = g^k(w) \quad \text{für } k = 0,1$$

richtig. Ferner hängt diese Schar reell analytisch vom Parameter $t \in [0,1]$ ab. Wir betrachten wir nun die Schar von Randwertproblemen $\mathcal{P}(t)$

$$\begin{aligned}
&\zeta = \zeta(u,v) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\
&(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega \\
&\zeta(x,y) = \tilde{g}^t(x,y) \quad \text{auf } \partial\Omega \, .
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung besitzt es für $t = 0$ eine Lösung. Wir wenden die Kontinuitätsmethode aus Satz 2, §6 an, welche die gesuchte Lösung des Problemes $\mathcal{P}(1)$ liefert. q.e.d.

Wir wollen nun zu einer vorgeschriebenen mittleren Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$, welche reell analytisch sei im Zylinder Z_{2h} und die Voraussetzungen (8.1) in Z_{2h} erfülle, eine Lösung der H-Flächengleichung zu einer Randverteilung konstruieren. Dazu gehen wir von der oberen Kugelkappe

$$\zeta^0(x,y) := \sqrt{\frac{1}{h^2} - x^2 - y^2} \quad \text{für } (x,y) \in \overline{\Omega}$$

aus, welche eine Fläche der konstanten mittleren Krümmung $-h$ ist. Wir wählen zunächst eine reell analytische Funktion $\varrho = \varrho(t) : \mathbb{R} \to [-1,1]$ mit den Eigenschaften

$$0 = \varrho(0) = \varrho'(0) = \varrho''(0) \quad \text{und} \quad \varrho'(t) > 0 \quad \text{für } t \neq 0 \, . \tag{8.2}$$

Wir ändern nun die vorgeschriebene, mittlere Krümmung H wie folgt ab

$$H_1(x,y,z) := -h + \varrho(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{h^2})(H(x,y,z)+h) \quad \text{in } Z_{2h} \, . \tag{8.3}$$

Wir beachten, dass H_1 reell analytisch im Zylinder Z_{2h} ist. Ausgehend von H_1 erklären wir

$$H_2(x,y,z) := \begin{cases} H_1(x,y,z) & \text{falls } x^2+y^2+z^2-\frac{1}{h^2} > 0 \text{ und } z > 0 \, , \\ -h & \text{sonst} \, . \end{cases} \tag{8.4}$$

Wegen den Voraussetzungen an ϱ ist damit $H_2 \in C^2(Z_{2h})$ richtig. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$|H_2(x,y,z)| \leq h \quad \text{für } (x,y,z) \in Z_{2h} \, .$$

In allen Punkten $(x,y,z) \in Z_{2h}$ mit $H_2(x,y,z) \neq -h$ gilt nun

$$\frac{\partial H_2}{\partial z} = \frac{\partial H_1}{\partial z} = 2z\varrho'(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{h^2})(H(x,y,z)+h) + \varrho(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{h^2})\frac{\partial H}{\partial z} \geq 0 \, ,$$

woraus wir ebenfalls

$$\frac{\partial H_2}{\partial z} \geq 0 \quad \text{in } Z_{2h}$$

ableiten. Zur vorgeschriebenen mittleren Krümmung H_2 betrachten wir nun erneut die Schar von Randwertproblemen $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(g^t)$

$$\begin{aligned}
&\zeta = \zeta(u,v) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\
&(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2H_2(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega \\
&\zeta(x,y) = g^t(x,y) \quad \text{auf } \partial\Omega \, .
\end{aligned}$$

Als Randverteilungen $g^t : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ wählen wir

$$g^t(x,y) := \sqrt{\frac{1}{h^2} - x^2 - y^2} + t \quad \text{für } (x,y) \in \partial\Omega \text{ und } t \in [0,T] \, ,$$

wobei wir $T > 0$ noch konkret zu wählen haben. Das Problem $\mathcal{P}(0)$ besitzt die Kugelkappe ζ^0 als Lösung, denn es gilt

$$H_2(x,y,z) = -h \quad \text{für } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{h^2} \, .$$

Wir betrachten nun die Schar der Randkurven

$$\Gamma^t := \{(x,y,g^t(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \partial\Omega\} \, .$$

Die vorgeschriebene mittlere Krümmung H_2 ist reell analytisch in der Menge

$$\{(x,y,z) \in Z_{2h} \mid x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{h^2} > 0 \, , \; z > 0\} \, ,$$

da sie dort mit der Funktion H_1 übereinstimmt. Diese Menge ist eine Umgebung der Randkurven Γ^t für $t \in (0,T]$. Nun ist die vorgeschriebene mittlere Krümmung H_2 ein keiner Umgebung der Randkurve Γ^0 reell analytisch. Wir können aber Kontinuitätsmethode trotzdem verwenden. Hierzu betrachten wir die Lösung des Problemes $\mathcal{P}(0)$, also die Kugelkappe ζ^0, parametrisiert in konformen Parametern:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) : \overline{B} \to \mathbb{R}^3 \in C^{2+\alpha}(\overline{B}) \quad , \quad |\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 = 0 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \, .$$

Diese ist sowohl eine Fläche der mittleren Krümmung H_1 als auch der mittleren Krümmung $-h$, d. h.

$$\triangle \mathbf{x} = 2H_1(\mathbf{x})\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = 2(-h)\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \, .$$

Wie im Beweis von Satz 1 in §6 erläutert, können wir daher $\mathbf{x}$ fortsetzen zu $\mathbf{x}_1 : B' \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{x}_2 : B' \to \mathbb{R}^3$ als Lösungen von

$$\triangle \mathbf{x}_1 = 2\Big(H_1(\mathbf{x}_1)\Big)(\mathbf{x}_1)_u \wedge (\mathbf{x}_1)_v \quad \text{und} \quad \triangle \mathbf{x}_2 = 2(-h)(\mathbf{x}_2)_u \wedge (\mathbf{x}_2)_v \quad \text{in } B'$$

mit einem B', welches $B \subset\subset B' \subset \mathbb{R}^2$ erfüllt. Da nun $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ reell analytisch in B' sind und in B übereinstimmen, so folgt mit dem Identitätsatz für reell analytische Funktionen ebenfalls $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_2$ in B'. Damit ist $\mathbf{x}_1$ eine Fläche sowohl der mittleren Krümmung $-h$ als auch der mittleren Krümmung H_1 und somit ebenfalls eine Fläche der mittleren Krümmung H_2 in B'. Beachten wir die Bemerkung zu Satz 2, §6, so können wir diesen Satz nun anwenden, welcher eine Lösung $\zeta = \zeta^T$ des Problemes $\mathcal{P}(T)$ zu den Randwerten g^T liefert. Die Fläche $\zeta = \zeta^T \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ist eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H_2, jedoch nicht eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H, da diese beiden Funktionen nicht übereinstimmen.
Um nun eine Fläche der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H zu konstruieren, betrachten wir eine Folge von Funktionen $\varrho^n : \mathbb{R} \to [-1,1]$, welche für jedes $n \in \mathbb{N}$ die

Eigenschaften (8.2) besitze und reell analytisch in $\mathbb{R}$ sei. Wir ermitteln diese Folge derart, dass zusätzlich die Konvergenz

$$\begin{aligned} \varrho^n(t) &\to 1 \quad \text{gleichmäßig in } [1,+\infty) \quad \text{sowie} \\ (\varrho^n)'(t) &\to 0 \quad \text{gleichmäßig in } [1,+\infty) \end{aligned}$$

richtig ist. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir dann die durch ϱ^n erklärten, abgeänderten mittleren Krümmungen H_1^n und H_2^n, definiert gemäß (8.3) und (8.4). Wir beachten, dass dann innerhalb der Menge

$$K := \{(x,y,z) \in Z_{2h} \mid x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{h^2} \geq 0\ ,\ z \geq 1\}$$

die Folge H_2^n gegen H in $C^1(K)$ konvergiert. Zu jedem n ermitteln wir nun die Lösung $\zeta = \zeta^n$ des Problemes

$$\begin{aligned} &\zeta = \zeta(x,y) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ &\mathcal{M}\zeta = 2H_2^n(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega \\ &\zeta(x,y) = g^T(x,y) = \sqrt{\frac{1}{h^2} - x^2 - y^2} + T \quad \text{auf } \partial\Omega\ . \end{aligned}$$

Da die Lösungen ζ^n die Randwerte g^T annehmen, gilt

$$\zeta^n(x,y) \geq T \quad \text{für } (x,y) \in \partial\Omega\ .$$

Der Hilfssatz 2 aus §3 liefert daher

$$\zeta^n(x,y) \geq T - \frac{1}{h} = 1 \quad \text{für } (x,y) \in \overline{\Omega}\ ,$$

wobei wir nun speziell $T := 1 + \frac{1}{h}$ wählen. Insbesondere folgt

$$(x,y,\zeta^n(x,y)) \in K \quad \text{für } (x,y) \in \overline{\Omega} \text{ und } n \in \mathbb{N}\ .$$

Mit dem Satz 2 aus §6, angwendet auf die Folge $\{\zeta_n\}_{n=1,2,\ldots}$, ermitteln wir eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ des Problemes

$$\begin{aligned} &\zeta = \zeta(x,y) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ &\mathcal{M}\zeta = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega \\ &\zeta(x,y) = g^T(x,y) = \sqrt{\frac{1}{h^2} - x^2 - y^2} + T \quad \text{auf } \partial\Omega\ . \end{aligned}$$

In Verbindung mit Satz 1 ergibt sich folgendes Resultat

Satz 2 : *Gegeben sei das 2h-konvexe Gebiet Ω mit der reell analytischen Randkurve $\partial\Omega$ sowie die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(Z_{2h})$, welche reell analytisch in Z_{2h} sei und dort ebenfalls die Voraussetzungen (8.1) erfülle. Dann besitzt das Dirichlet-problem der H-Flächengleichung*

$$\begin{aligned} &\zeta = \zeta(x,y) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\ &\mathcal{M}\zeta = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \textit{in } \Omega \\ &\zeta(x,y) = g(x,y) \quad \textit{auf } \partial\Omega\ . \end{aligned}$$

für alle reell analytischen Randverteilungen $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Wir werden nun noch die Voraussetzung der reellen Analytizität der vorgeschriebenen mittleren Krümmung sowie der Randkurve eliminieren.

Satz 3 : *Die vorgeschriebene mittlere Krümmung $H \in C^{1+\alpha}(\overline{Z}_{2h})$ erfülle in Z_{2h} die Voraussetzungen (8.1). Weiterhin sei ein $2h$-konvexes Gebiet Ω mit einer Randkurve $\partial\Omega$ der Klasse $C^{2+\alpha}$ gegeben. Dann besitzt das Dirichletproblem der H-Flächengleichung für Graphen*

$$\begin{aligned}
&\zeta = \zeta(x,y) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \\
&\mathcal{M}\zeta = 2H(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega \\
&\zeta(x,y) = g(x,y) \quad \text{auf } \partial\Omega \, .
\end{aligned}$$

für alle Randverteilungen $g \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Beweis:
1.) Wir zeigen zunächst, dass sich der Rand $\partial\Omega$ durch Ränder $\partial\Omega^n$ von $2h$-konvexen Gebieten Ω^n mit reell analytischer Randkurve approximieren lässt. Dazu sei

$$\beta = \beta(t) : \mathbb{R} \to \partial\Omega \in C_T^{2+\alpha}(\mathbb{R})$$

eine reguläre Parametrisierung des Randes $\partial\Omega$, welche die Periode $T > 0$ besitzt. Da Ω ein $2h$-konvexes Gebiet ist, gilt wegen Def. 1 aus §4 für die Krümmung $\kappa(t)$ der Randkurve $\partial\Omega$ die Abschätzung

$$|\kappa(t)| > 2h \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \, . \tag{8.5}$$

Wir approximieren nun die Funktion β durch eine Folge $\beta^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von reell analytischen, T-periodischen Funktionen, so dass die Konvergenz

$$\beta^n \;\to\; \beta \quad \text{in } C^2(\mathbb{R}) \text{ für } n \to \infty \tag{8.6}$$

richtig ist. Da β injektiv im Intervall $[0,T)$ ist, können wir mit dieser Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$ ermitteln, so dass für $n \geq n_0$ ebenfalls β^n injektiv im Intervall $[0,T)$ und regulär sind. Die Mengen $\beta^n(\mathbb{R})$ sind dann homöomorph zu ∂B und somit besitzt $\mathbb{R}^2 \backslash \beta^n(\mathbb{R})$ zwei Zusammenhangskomponenten, von welchen wir das beschränkte als Ω^n bezeichnen. Die Abbildungen β^n bilden dann eine Parametrisierung des Randes $\partial\Omega^n$. Wegen der Konvergenz (8.6) konvergieren die Krümmungen $\kappa^n(t)$ der Kurven β^n gegen die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve β. Unter Beachtung von (8.5) ermitteln wir damit ein $n_1 \geq n_0$, so dass die Abschätzung

$$|\kappa^n(t)| > 2h \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } n \geq n_1$$

richtig ist. Die Gebiete Ω^n sind also für $n \geq n_1$ $2h$-konvexe Gebiete mit reell analytischer Randkurve $\partial\Omega^n$.

2.) Es sei nun eine Randverteilung $g \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ gewählt. Wir setzen diese zunächst zu $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C_0^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ fort. Wir finden nun eine Folge $\tilde{g}^n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von reell analytischen Funktionen, für welche die Konvergenz $\tilde{g}^n \to \tilde{g}$ in $C^2(\mathbb{R}^2)$ richtig ist. Zusätzlich können wir

$$R := \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ n\in\mathbb{N}}} |\tilde{g}^n(x,y)| < +\infty$$

erreichen. Wir setzen nun

$$K := \{(x,y,z) \in \overline{Z}_{2h} \mid |z| \leq R + \frac{1}{h}\}$$

und ermitteln eine Folge von reell analytischen Funktionen $H^n = H^n(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, für welche die Konvergenz $H^n \to H$ in $C^1(K)$ richtig ist. Da nun H die Voraussetzungen (8.1) in Z_{2h} erfüllt, können wir zusätzlich

$$|H^n(x,y,z)| \leq h \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial H^n}{\partial z} \geq 0 \quad \text{in } Z_{2h} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

erreichen. Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun das Problem

$$\begin{aligned}
&\zeta = \zeta(x,y) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^n)\\
&\mathcal{M}\zeta = 2H^n(x,y,\zeta(x,y))(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega^n\\
&\zeta(x,y) = \tilde{g}^n(x,y) \quad \text{auf } \partial\Omega^n\ .
\end{aligned}$$

Dieses besitzt wegen Satz 2 zu $n \geq n_1$ eine Lösung $\zeta^n \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^n)$. Das Maximumprinzip aus Hilfssatz 3 in §3 liefert

$$\sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}^n} |\zeta^n(x,y)| \leq \sup_{(x,y)\in\partial\Omega^n} |\zeta^n(x,y)| + \frac{1}{h} = \sup_{(x,y)\in\partial\Omega^n} |\tilde{g}^n(x,y)| + \frac{1}{h} \leq R + \frac{1}{h}$$

oder äquivalent

$$(x,y,\zeta^n(x,y)) \in K \quad \text{für } (x,y) \in \overline{\Omega}^n\ .$$

Wenden wir nun Satz 2 aus §6 auf die Folge $\{\zeta^n\}_{n=1,2,\ldots}$ an, so liefert dieser eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ des H-Flächenproblemes zur vorgeschriebenen mittleren Krümmung H und den Randwerten g. q.e.d.

Beispiel1: Zu einer Konstante $h > 0$ wählen wir ein $2h$-konvexes Gebiet Ω mit $C^{2+\alpha}$-Randkurve. Weiter sei eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $|c| \leq h$ gewählt. Dann betrachten wir das Randwertproblem für Flächen der konstanten mittleren Krümmung c in nichtparametrischer Form

$$\begin{aligned}
&\zeta = \zeta(x,y) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})\\
&(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2c(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega\\
&\zeta(x,y) = g(x,y) \quad \text{auf } \partial\Omega\ .
\end{aligned}$$

Mit Satz 3 besitzt dieses Problem für jede Randverteilung $g \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Im Falle $c = 0$ erhalten wir Minimalflächen.

Beispiel2: Zu gegebener Konstante $\kappa > 0$ betrachten wir im $2h$-konvexen Gebiet Ω mit $C^{2+\alpha}$-Randkurve das Kapillaritätsproblem

$$\begin{aligned}
&\zeta = \zeta(x,y) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})\\
&(1+\zeta_y^2)\zeta_{xx} - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + (1+\zeta_x^2)\zeta_{yy} = 2\kappa\zeta(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } \Omega\\
&\zeta(x,y) = g(x,y) \quad \text{auf } \partial\Omega\ .
\end{aligned}$$

Die vorgeschriebene mittlere Krümmung ist also in diesem Fall die Funktion $H(x,y,z) := \kappa z$. Von der Randverteilung $g \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ müssen wir die Kleinheitsbedingung

$$\varepsilon := ||g||_0^{\partial\Omega} < \frac{h}{\kappa}$$

fordern. Wir ändern H nun zu einer Funktion $\tilde{H} \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ab, welche die Bedingungen

$$\begin{aligned}
&\tilde{H}(x,y,z) = H(x,y,z) = \kappa z \quad \text{für } |z| \leq \varepsilon\\
&\frac{\partial\tilde{H}}{\partial z} \geq 0 \quad \text{und} \quad |\tilde{H}(x,y,z)| \leq h \quad \text{in } \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

erfüllt. Mit Satz 3 ermitteln eine Lösung $\zeta \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblemes zur mittleren Krümmung $\tilde{H}$. Das Maximumprinzip aus Hilfssatz 3, §3 liefert

$$||\zeta||_0^{\Omega} \leq ||\zeta||_0^{\partial\Omega} = ||g||_0^{\partial\Omega} = \varepsilon$$

und somit ist ζ ebenfalls eine Fläche der mittleren Krümmung $H(x, y, z) = \kappa z$.

Literatur

[1] U.Dierkes, S.Hildebrandt, A.Küster, O.Wohlrab: *Minimal Surfaces I,II.* Springer, Berlin Heidelberg New York, 1992.

[2] D.Gilbarg, N.S.Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, Berlin Heidelberg New York, 1983.

[3] F.Müller: *Über die Fortsetzung von Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen.* Dissertation an der BTU Cottbus, 2000.

[4] F.Sauvigny: *Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene.* Math. Zeit. 180, 41-67 (1982).

[5] F.Sauvigny: *Analysis III.* Vorlesungsskriptum an der BTU Cottbus, Herbstsemester 1998/99.

[6] F.Sauvigny: *Analysis IV.* Vorlesungsskriptum an der BTU Cottbus, Sommersemester 1999.

[7] F.Sauvigny: *Deformation of Boundary Value Problems For Surfaces of Prescribed Mean Curvature.* Analysis 21, 2000 157-169.

[8] F.Sauvigny: *Analysis V.* Vorlesungsskriptum an der BTU Cottbus, Wintersemester 2000/2001.

[9] F.Sauvigny: *Analysis VI.* Vorlesungsskriptum an der BTU Cottbus, Wintersemester 2002/2003.