ulm university universität uulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 24. April 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	Summe
Soll	9	6	5	20
Ist				

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Gegeben ist die Kurve

$$c(t) : (-1,1) \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad c(t) := \left(t^2, t\sqrt{1-t^2}\right) .$$

   (a) Berechnen Sie die Länge der Kurve c.

   (b) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve c nach Bogenlänge an.

   (c) Zeigen Sie $\lim\limits_{t\to+1} c(t) = \lim\limits_{t\to-1} c(t)$, d.h. die Kurve ist geschlossen.
   Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{t\to\pm1} c'(t)$ und deuten Sie das Ergebnis.

   (d) Zeigen Sie, dass c einen Kreis von Radius $\frac{1}{2}$ mit Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ parametrisiert.

2. (a) Sei $\sim$ eine Relation zwischen Kurven $c, \tilde{c}$ mit $c \sim \tilde{c} :\Leftrightarrow$ es gibt eine Parametertransformation φ, so dass $\tilde{c} = c \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von c ist. Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der parametrisierten Kurven.

   (b) Welche der folgenden Parametrisierungen repräsentieren dieselbe orientierte Kurve?

$$\begin{aligned}
c_1(t) &:= (\cos t, \sin t) \quad , \; t \in (0, \pi) \\
c_2(t) &:= (\cos^2 t - \sin^2 t, 2 \sin t \cos t) \quad , \; t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\
c_3(t) &:= (t, \sqrt{1-t^2}) \quad , \; t \in (-1, 1) \\
c_4(t) &:= \left(\tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right) \quad , \; t \in (-\infty, +\infty)
\end{aligned}$$

3. Schließen Sie aus dem Folgenden, dass die Gerade $g(t) := (t, 0)$ für $t \in [0,1]$ die kürzeste Verbindung der Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass die Länge der Gerade g gleich 1 ist.

   (b) Sei $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = (0,0)$ sowie $c(1) = (1,0)$ eine Kurve mit $c(t_0) \notin [0,1] \times \{0\}$ für ein $t_0 \in [0,1]$. Zeigen Sie für ihre Länge $L(c) > 1$.

Differentialgeometrie

Termine

Vorlesung:	Mittwoch, 8:00-10:00 Uhr im Raum 220, Helmholtzstraße 18
Übung:	Mittwoch, 10:00-11:00 Uhr im Raum 220, Helmholtzstraße 18

Übungsschein/Leistungsnachweis

Vorraussetzungen zur Erlangung des Scheins sind 50% der Punkte aus den Übungsserien und die aktive Teilnahme an den Übungen (mindestens eine Aufgabe an der Tafel vorrechnen).

Abgabe der Übungsaufgaben

Jeweils bis Dienstag vor der Übung, 12:00 Uhr im Raum 231 oder 210 in der Helmholtzstraße 18

Prüfung

Die Vorlesung kann als 2+1 Vorlesung zusammen mit

1. der Vorlesung "Integralgleichungen" (2+1) (Prof. Balser) oder
2. dem ersten Teil (Elliptische Differentialgleichungen) der Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen" (Prof. Schulz)

als 6 SWS oder alleine als 3 SWS geprüft werden (abhängig von den Anforderungen der Prüfungsordnung).

Weitere Informationen

Das Skript, die Übungsaufgaben und weitere Informationen finden sich unter
http://www.mathematik.uni-ulm.de/analysis/lehre/diffgeo_ss07/Diffgeo_ss07.html