ulm university universität uulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 8. Mai 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	8	9	10	Summe
Soll	6	4	7	17
Ist				

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

8. Gegeben sei eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $c(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. In einem Punkt $t_0 \in (a, b)$ sollen die Bedingungen

$$c(t_0) = (r, 0) \quad , \quad c'(t_0) = (0, 1) \quad \text{sowie} \quad \kappa(t_0) > \frac{1}{r}$$

für ein $r > 0$ gelten. Weiterhin sei B_r die abgeschlossene Kreisscheibe $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

   (a) Skizzieren Sie die Kreisscheibe B_r sowie eine mögliche Lage der Kurve c.

   (b) Zeigen Sie, dass sich die Kurve c lokal um $c(t_0)$ innerhalb der Kreisscheibe B_r befindet. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass die Hilfsfunktion $f(t) := x(t)^2 + y(t)^2$ in t_0 ein striktes lokales Maximum annimmt.

9. Gegeben sei eine Kurve $c(t) = (t, f(t))$ mit $f : [t_1, t_3] \to \mathbb{R}$ und $t_2 \in (t_1, t_3)$, so dass die drei Punkte $(t_k, f(t_k))$ für $k = 1, 2, 3$ auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie, dass dann ein $t_* \in (t_1, t_3)$ existiert mit $f''(t_*) = 0$, also ein Wendepunkt von f.

10. Es sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Helix $c(t) := \big(r \cos t, r \sin t, ht\big)$, wobei $r > 0$ und $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Parametrisieren Sie die Kurve auf Bogenlänge.

   (b) Berechnen Sie Krümmung $\kappa(t)$ und Normale $n(t)$ der Helix.

   (c) Ermitteln Sie die Binormale $b(t)$ und berechnen Sie die Torsion $\tau(t)$.