ulm university universität uulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 21. Mai 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	15	16	17	18	Summe
Soll	5	4	6	4	19
Ist					

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

15. (a) Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : M \to M \in C^0(M, M)$ einen Fixpunkt hat, wenn M zur Kreisscheibe $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ homöomorph ist. Dabei heißt M zu B homöomorph, wenn eine stetige, bijektive Abbildung $h : B \to M$ existiert, deren Inverse h^{-1} ebenfalls stetig ist.

    (b) Finden Sie eine kompakte, nichtleere und zusammenhängende Menge $M \subset \mathbb{C}$ sowie eine stetige Abbildung $f : M \to M$, welche keinen Fixpunkt besitzt.

16. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve und $U \subset \mathbb{R}^2 \backslash c(I)$ eine wegzusammenhängende Menge, d.h. je zwei Punkte in U lassen sich durch eine Kurve verbinden, welche ganz in U liegt. Zeigen Sie, dass die Windungszahl konstant in U ist, also $W(c, p_1) = W(c, p_2)$ für $p_1, p_2 \in U$.

17. Es sei C die Menge aller regulären Kurven $c(t) = (x(t), y(t)) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = (-1, 0)$, $c(1) = (1, 0)$ und $y(t) \geq 0$ in $[0, 1]$.

    (a) Skizzieren Sie zwei Kurven aus der Klasse C.

    (b) Sei L die Länge einer Kurve $c \in C$ sowie A der Flächeninhalt der Fläche, welche von c und der x-Achse eingeschlossen wird. Zeigen Sie $L^2 \geq 2\pi A$.

    (c) Für welche Kurve $c \in C$ gilt die Gleichheit $L^2 = 2\pi A$?

18. (a) Im Jahre 1836 bewies Jakob Steiner, dass das isoperimetrische Problem außer dem Kreis keine andere Lösung besitzen kann. Hat er damit wirklich (wie er wahrscheinlich meinte) bewiesen, dass der Kreis die Lösung des isoperimetrischen Problemes ist?

    (b) Wir beweisen "1 ist die größte natürliche Zahl" wie folgt: Angenommen $n > 1$ wäre die größte natürliche Zahl. Dann ist n^2 größer als n, also kann n nicht die größte natürliche Zahl gewesen sein. Also muss 1 die größte natürliche Zahl sein.
    Was halten Sie von dieser Argumentation? Was hat dies mit Teil a) zu tun?