ulm university universität ulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 12. Juni 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	22	23	24	25	Summe
Soll	6	3	7	5	21
Ist					

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

22. Um die Normale einer Hyperfläche definieren zu können,benötigen wir das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^{n+1}$. Zu n Spaltenvektoren $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ erklären wir deren Vektorprodukt wie folgt

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_n = \sum_{i=1}^{n+1} \det(X_1, \ldots, X_n, e_i) e_i$$

wobei $e_1, \ldots, e_{n+1}$ die Einheitsbasis des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

   (a) Zeigen Sie: Das Vektorprodukt $X_1 \wedge \cdots \wedge X_n$ steht senkrecht auf jedem X_k, $k = 1, \ldots, n$.

   (b) Zeigen Sie: Das Vektorprodukt ist genau dann gleich Null, wenn die Vektoren $X_1, \ldots, X_n$ linear abhängig sind.

   (c) Überlegen Sie sich, dass für $n = 2$ das bekannte Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ entsteht.

23. Zu einer Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^{n+1})$ betrachten wir die skalierte Fläche $f_\lambda(p) := \lambda f(p)$ zu einem $\lambda > 0$. Berechnen Sie erste und zweite Fundamentalform von f_λ in Abhängigkeit von f.

24. Wir betrachten wieder Katenoid und Helikoid $k, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$k(x, y) := (\cosh x\, \cos y,\ \cosh x\, \sin y,\ x), \qquad h(x, y) := (\sinh x\, \sin y,\ -\sinh x\, \cos y,\ y).$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Gauß–Abbildungen n für k und h übereinstimmen.

   (b) Berechnen Sie $\partial_x n$ und $\partial_y n$ und daraus die Weingarten–Abbildungen.

   (c) Ermitteln Sie nun die Hauptkrümmungen dieser Flächen.

25. Gegeben ist die Sphäre $\mathbb{S}^n_r = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |p| = r\}$ vom Radius r.

   (a) Zeigen Sie: Für jede beliebige Parametrisierung $f : U \to \mathbb{S}^n_r$ ist $\nu(p) := \frac{1}{r} f(p)$ eine Gauß–Abbildung.

   (b) Ermitteln Sie nun die Weingarten–Abbildung und Hauptkrümmungen von $\mathbb{S}^n_r$.