ulm university universität ulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 18. Juni 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	26	27	28	Summe
Soll	7	5	10	22
Ist				

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

26. Die Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ sei ein Graph über der x, y-Ebene, dass heisst $f(x, y) = (x, y, u(x, y))$ für ein $u \in C^2(U, \mathbb{R})$.

    (a) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform in Abhängigkeit von u.

    (b) Ermitteln Sie die mittlere Krümmung $H(x, y)$ der Fläche f in Abhängigkeit von u.

    (c) Zeigen Sie nun, dass die nichtlineare elliptische Differentialgleichung

    $$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 2H(x, y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } U \tag{1}$$

    erfüllt ist.

27. Auf Flächen ($n = 2$) nennt man Punkte p mit $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ *Nabelpunkte*. Offenbar bestehen $\mathbb{S}_r^2$ und $\mathbb{R}^2$ ganz aus Nabelpunkten. In dieser Aufgabe beweisen wir die Umkehrung dieser Feststellung: *Sei $f \colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, für die jedes $p \in U$ ein Nabelpunkt ist, also $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) =: \kappa(p)$. Dann ist $f(U)$ in einer Ebene oder in einer Sphäre $\mathbb{S}_r^2$ mit $r > 0$ enthalten.*

    (a) Zeigen Sie unter Verwendung von $SX = \kappa X$, dass $\partial_i n = -\kappa \partial_i f$ $(i = 1, 2)$ und berechnen Sie damit $\partial_{12} n(p) - \partial_{21} n(p)$. Schließen Sie aus dem Ergebnis $0 = \partial_1 \kappa(p) = \partial_2 \kappa(p)$. Warum zeigt dies, dass κ konstant auf U ist?

    (b) Zeigen Sie, dass im Falle $\kappa(p) \equiv 0$ die Parametrisierung in einer Ebene liegt.

    (c) Nun wollen wir zeigen, dass im Fall $\kappa(p) \equiv \kappa \neq 0$ die Fläche $f(U)$ in einer Sphäre vom Radius $\frac{1}{\kappa}$ liegt. Zeigen Sie dazu durch Differentiation, dass $f(p) + \frac{1}{\kappa} n(p)$ konstant ist und daher den Mittelpunkt der gesuchten Sphäre definiert.

28. Es sei $c \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, und $V \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ glattes Vektorfeld. Die Fläche

    $$f \colon (\alpha, \beta) \times [a, b] \to \mathbb{R}^3, \qquad f(s, t) := c(t) + sV(t).$$

    nennt man *Regelfläche*.

    (a) Zeigen Sie, dass Zylinder und Kegel Regelflächen sind. Welche weiteren Beispiele von Regelflächen kennen Sie?

    (b) Zeigen Sie: Das Bild einer Regelfläche unter einer linearen Abbildung $A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist wieder Regelfläche.

    (c) Es seien die Vektoren $c'(t)$ und $V(t)$ für $t \in [a, b]$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion ist. Wir setzen dies von nun an voraus.

    (d) Zeigen Sie $K(s, t) \leq 0$ für die Gausskrümmung der Regelfläche. Warum gilt $K(s, t) < 0$ genau dann, wenn die Vektoren $V(t), V'(t), c'(t)$ linear unabhängig sind?

    (e) Eine Regelfläche hat Gauß-Krümmung $K \equiv 0$ genau dann, wenn die Normale n längs jeder Regelgeraden (d.h. $t =$const) konstant ist.