ulm university universität uulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 25. Juni 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	29	30	31	32	Summe
Soll	5	7	4	4	20
Ist					

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

29. Wir betrachten die Traktrix

$$(r,h)(t) := \Big(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t\Big) \text{ für } t > 0$$

und untersuchen nun die von ihr erzeugte Rotationsfläche $f(t,\phi) = \big(r(t)\cos\phi, r(t)\sin\phi, h(t)\big)$.

   (a) Berechnen Sie die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 dieser Fläche.

   (b) Zeigen Sie nun, dass die Gausskrümmung dieser Fläche konstant ist.

30. Zu der nach Bogenlänge parametrisierten Meridiankurve $(r,h)(t)\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$, $r'^2 + h'^2 = 1$, betrachten wir die erzeugte Rotationsfläche.

   (a) Leiten Sie aus $K \equiv c$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für r her und lösen Sie diese. Geben Sie danach eine Integraldarstellung der Funktion h an.
   Hinweis: Betrachten Sie getrennt die drei Fälle $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$.

   (b) Geben Sie im Fall $K \equiv 0$ explizit die Funktionen r und h an. Welche Rotationsflächen ergeben sich hier?

   (c) Zeigen Sie, dass $r(t) = a\cos t$ zu $a > 0$ eine Lösung der Differentialgleichung aus 30a für $K \equiv 1$ ist. Berechnen Sie $h(t)$ für $a = 1$ explizit und skizzieren Sie die Meridiankurve. Bestimmen Sie für $0 < a < 1$ und $a > 1$ Definitionsbereiche, Wertebereiche und Monotonie von r und h und skizzieren Sie für diese Fälle die Meridiankurve.

31. Ein Graph $f(x,y) = (x,y,u(x,y))$ ist eine *Minimalfläche*, d.h. $H = 0$, falls die Differentialgleichung

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$$

gilt. Wir untersuchen Minimalflächen mit der speziellen Form $u(x,y) = g(x) + h(y)$, diese heißen *Scherksche Minimalflächen*.

   (a) Zeigen Sie zunächst, dass es eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{g''(x)}{1+g'(x)^2} = a = -\frac{h''(y)}{1+h'(y)^2} \text{ für alle } x, y \text{ gilt.}$$

   (b) Lösen Sie nun diese beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen zu den Anfangswerten $g(0) = h(0) = g'(0) = h'(0) = 0$. Was ist der maximale Definitionsbereich der Lösung?
   (*Hinweis:* $\frac{d}{dt}\log\cos t = -\tan t$.)

32. Man zeige, dass die Hauptkrümmungen invariant sind gegenüber Drehungen im Raum, d.h. ist $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Fläche mit den Hauptkrümmungen κ_i $(i = 1,\dots,n)$, so ist für eine Drehung O die Abbildung $\tilde{f} := O \circ f$ ebenfalls eine Fläche und ihre Hauptkrümmungen $\tilde{\kappa}_i$, stimmen mit κ_i $(i = 1,\dots,n)$ überein.