ulm university universität ulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 2. Juli 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	33	34	35	Summe
Soll	6	5	7	18
Ist				

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

33. Zu einer Fläche $f : U \to \mathbb{R}^3$ mit ihrer Normalen n erklären wir die Parallelfläche

$$f_s : U \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad f_s(x,y) := f(x,y) + sn(x,y) \text{ in } U.$$

Für hinreichend kleines $|s|$ sind diese Parallelflächen auch wieder Immersionen.

(a) Zeigen Sie, dass n ebenfalls eine Normale für die Parallelfläche f_s ist.

(b) Sei die Fläche f nun in Krümmungslinienparametern parametrisiert, d.h. $n_x = -\kappa_1 f_x$ und $n_y = -\kappa_2 f_y$ mit den beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2. Zeigen Sie

$$\sqrt{\det g_s} = \sqrt{\det g}\Big(1 - 2Hs + Ks^2\Big),$$

für die erste Fundamentalform g_s von f_s. Dabei sind H die mittlere und K die Gausskrümmung von f.

(c) Gilt diese Formel auch, wenn f nicht in Krümmungslinienparametern parametrisiert ist?

34. Gegeben sei eine Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Normalen n und $0 \in U$. Für ein $R > 0$ gelte

$$f(0) = (0, \dots, 0, -R) \quad , \quad n(0) = (0, \dots, 0, 1) \text{ sowie } \kappa_i(0) > \frac{1}{R} \text{ für } i = 1, \dots, n\,.$$

Zeigen Sie, dass dann f lokal um 0 in der Kugel $B_R := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| < R\}$ befindet, d.h. es gibt eine Menge $V \subset U$ mit $0 \in V$ und $f(V) \subset \overline{B_R}$ und $f(V\backslash\{0\}) \subset B_R$.

35. Gegeben sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, d.h. $g_{11} = 1$ sowie $g_{12} = 0$. Berechnen Sie alle acht Christoffelsymbole in Abhängigkeit von $G(p) := g_{22}(p)$. Unter welchen Voraussetzungen ist eine Rotationsfläche $f(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ in Gaußscher Form gegeben?