ulm university universität uulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 9. Juli 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	36	37	38	Summe
Soll	6	6	6	18
Ist				

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

36. Eine Parametrisierung $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ nennt man flächentreu, falls für die erste Fundamentalform $\det(g_{ij}) = 1$ gilt. Wir wollen zeigen, dass sich durch geeignete Umparametrisierung jede Fläche lokal flächentreu parametrisieren lässt.

    (a) Betrachten Sie zu $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ die umparametrisierte Fläche

    $$\tilde{f}(u, v) := f(\varphi(u, v), v)$$

    mit einer gewissen Funktion $\varphi(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die erste Fundamentalform $\tilde{g}_{ij}$ von $\tilde{f}$ sowie $\det(\tilde{g}_{ij})$.

    (b) Leiten Sie aus der Bedingung $\det(\tilde{g}_{ij}) = 1$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\varphi = \varphi(u)$ her, in der v als Parameter eingeht. Zeigen Sie, dass diese bei geeignet gestellten Anfangswerten lösbar ist.

37. Es sei die erste Fundamentalform gleich der Einheitsmatrix, $g_{ij} = \delta_{ij}$, und für die zweite Fundamentalform gelte $b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0$ sowie $b_{22}(x, y) = b(x, y)$.

    (a) Wann sind sowohl Gauß- also auch Codazzigleichung erfüllt? Nach dem Hauptsatz der Flächentheorie lässt sich dann eine Fläche finden, deren erste und zweite Fundamentalform mit der gegebenen übereinstimmen.

    (b) Was ist die Gaußkrümmung dieser Fläche?

    (c) Was für eine Fläche entsteht, wenn man $b(x, y) \equiv 1$ wählt?

38. Es sei die erste Fundamentalform gleich der Einheitsmatrix, $g_{ij} = \delta_{ij}$. Wir betrachten drei verschiedene zweite Fundamentalformen, die ersten beiden mit $b_{12} = b_{21} = 0$ und mit (i) $b_{11} = 1$, $b_{22} = -1$ bzw. (ii) mit $b_{11}(x, y) = b_{22}(x, y) = (1 + x^2 + y^2)$ und (iii) mit $b_{11} = x^2$, $b_{12} = b_{21} = xy$, $b_{22} = y^2$. Zeigen Sie, dass es keine Flächen $f : U \to \mathbb{R}^3$ mit den beiden Fundamentalformen geben kann:

    (a) Was müßte die Gauß-Krümmung sein?

    (b) Sind Gauß- und Codazzi-Gleichung erfüllt?