ulm university universität uulm

Übungen - Differentialgeometrie

Abgabe: bis 16. Juli 2007, 12:00 Uhr, Raum 321, HeHo 18

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jan-Willem Liebezeit
jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	39	40	41	Summe
Soll	8	5	7	20
Ist				

Bis auf solche Fakten, die aus der Vorlesung bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

39. (a) Geben Sie je eine längentreue Parametrisierung des Zylinder $Z = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ sowie des Kegels $K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \}$ an.
    (b) Ermitteln Sie nun alle Geodätischen auf Zylinder und Kegel.

40. Gegeben sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, d.h. es gilt $g_{11} = 1$ sowie $g_{12} = 0$ für die erste Fundamentalform.
    (a) Zeigen Sie, dass die Kurven $c(s) := f(s, t)$ für festes t Geodätische sind.
    (b) Zu nach Bogenlänge parametrisierter Kurve $(r, h)(t)$ betrachten wir die Rotationsfläche
    $$f(t, \varphi) := (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t)) \ .$$
    Zeigen Sie, dass f eine Parametrisierung in Gaußscher Form ist und folgern Sie, dass die Meridiankurve $c(t) := f(t, \varphi)$ für festes φ eine Geodätische ist.

41. Gegeben sei eine Fläche $f \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, also $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ sowie $G^2(p) := g_{22}(p)$ mit $G > 0$. Zeigen Sie für die Gaußkrümmung die Formel
    $$K(u, v) = -\frac{G_{uu}}{G} \ .$$
    Welche Formel erhält man speziell für Rotationsflächen mit nach Bogenlänge parametrisierter Meridiankurve?