ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Nichtlineare Funktionalanalysis - Übung 3

Abgabe: 5. November 2007, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	Summe
Soll	8	8	5+4	21+4
Ist				

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_{yy} = h(x, y, u, u_x, u_y) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \\ &u(0,0) = 0 \\ &u_x(x,0) = u_y(x,0) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   mit einer Funktion $h \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

   (a) Zeigen Sie bitte: Es gibt eine Parametertransformation

$$(x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

   so dass die Funktion $v(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ Lösung der Differentialgleichung $v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{h}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$ mit einem geeigneten $\tilde{h}$ ist.

   (b) Bestimmen Sie aus h die Funktion $\tilde{h}$ so dass Sie aus einer Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{h}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \\ &v(0,0) = 0 \\ &v_\xi(\xi, -\xi) = v_\eta(\xi, -\xi) = 0 \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   eine Lösung u des obigen Ausgangsproblems erhalten.

2. (a) Betrachten Sie auf einem Banachraum B die Funktion $f : B \to B$, welche mit $c > 1$ die Bedingung

$$\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in B$$

   erfüllt. Weiter sei f surjektiv. Zeigen Sie bitte, dass f genau einen Fixpunkt hat.

   (b) Zeigen Sie bitte, dass auf die Voraussetzung der Surjektivität nicht verzichtet werden kann.

3. (a) Sei B ein Banachraum und $L \subset B$ eine Menge mit der Eigenschaft: Jede stetige Funktion $f : L \to L$ hat einen Fixpunkt. Zeigen Sie, dass dann auch jede zu L homöomorphe Menge diese Eigenschaft hat. Dabei nennen wir eine Menge M homöomorph zu einer Menge N, falls es eine stetige und bijektive Abbildung $g : M \to N$ mit stetiger Inverser $g^{-1} : N \to M$ gibt.

   (b*) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, konvexe Menge. Zeigen Sie bitte den Brouwerschen Fixpunktsatz für diese Menge. Hinweis: Zeigen Sie dass jede kompakte, konvexe Menge homöomorph zu einer abgeschlossenen Kugel im $\mathbb{R}^k$ mit $k \leq n$ ist.