ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $f = f(t,y) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in C^0([0,1] \times \mathbb{R}^n)$ eine stetige und bezüglich y Lipschitz-stetige Funktion und $g : \overline{B} \to \overline{B} \in C^0(\overline{B})$. Weiter genüge f einer der folgenden Strukturbedingungen:
   (a) $\langle y, f(t,y)\rangle < 0$ für alle $|y| = 1$ und alle $t \in [0,1]$.
   (b) $\langle y, f(t,y)\rangle \leq 0$ für alle $|y| \leq 1$ und alle $t \in [0,1]$.

   Zeigen Sie bitte, dass das Randwertproblem
   $$y : [0,1] \to \mathbb{R}^n \in C^1[0,1], \quad y' = f(t,y), \quad y(0) = g(y(1))$$
   eine Lösung hat.

2. Sei $f = f(t,y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und in t periodisch mit Periodenlänge 1, d.h. $f(t,y) = f(t+1,y)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Sei weiter $y : [0,1] \to \mathbb{R} \in C^1[0,1]$ eine Lösung des Randwertproblems
   $$y' = f(t,y), \qquad y(0) = y(1).$$
   Zeigen Sie bitte, dass y auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar ist durch eine Funktion $Y \in C^1(\mathbb{R})$ mit $Y(t) = y(t)$ für $t \in [0,1]$ und $Y(t+k) = Y(t)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $t \in \mathbb{R}$.

3. Welche der folgenden Korrespondenzen $f, g : [0,2] \rightrightarrows [0,2]$ sind abgeschlossen?
   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{falls} \quad x \in [0,1) \\ [0,1] & \text{falls} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$
   (b)
   $$g(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{falls} \quad x \in [0,1] \\ [0,1] & \text{falls} \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $g : M \times M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche nicht identisch verschwindet. Betrachten Sie die folgende mengenwertige Abbildung
   $$f(x) = \{y \in M \,:\, g(x,y) = 0\}.$$
   Geben Sie bitte mindestens zwei verschiedene Bedingungen an g an, so dass $f : M \rightrightarrows M$ eine abgeschlossene Korrespondenz ist.

5. Sei $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel. Es seien stetige Funktionen $g : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ und $h : \overline{B} \to \mathbb{R}$ mit der Bedingung $|g(x)| \geq |h(x)|$ für alle $x \in \overline{B}$ gegeben. Zeigen Sie bitte, dass es ein $x \in \overline{B}$ gibt mit
   $$\langle x, g(x)\rangle = h(x).$$