ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Betrachten Sie bitte den Sturm-Liouville-Kern

$$K(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)(y+1), & -1 \le y \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}(x+1)(y-1), & -1 \le x \le y \le 1. \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie bitte, dass für alle stetigen f die Funktion

   $$v(x) := \int_{-1}^{1} K(x,y) f(y)\, dy$$

   zur Klasse $C^2[-1,1]$ gehört und Lösung des Randwertproblems

   $$v'' = f, \quad v(-1) = 0 = v(1)$$

   ist. Bestimmen Sie bitte a-priori Abschätzungen, d.h. eine Konstante $C > 0$ so dass

   $$\|v\|_{C^2[-1,1]} \le C \|f\|_{C^0[-1,1]}$$

   richtig ist für alle Lösungen des RWP aus Aufgabe (a).

   (b) Sei $f : [-1,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^0([-1,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ eine Funktion mit

   $$\|f\|_{C^0([-1,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})} < \infty.$$

   Lösen sie bitte das RWP

   $$v'' = f(t, v, v'), \quad v(-1) = 0 = v(1).$$

   (c) Geben Sie bitte ein f, welches die Voraussetzungen aus Teilaufgabe (c) erfüllt, an so dass das RWP aus (c) mehrere Lösungen hat.

2. Betrachten Sie bitte den Operator

$$Kx(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$$

   (a) Zeigen Sie bitte, dass der Operator $K : C^0[0,1] \to C^0[0,1]$ vollstetig ist.

   (b) Zeigen Sie bitte, dass der Operator $K : C^0[0,1] \to C^1[0,1]$ stetig ist.

   (c) Untersuchen Sie den Operator $K : C^0[0,1] \to C^1[0,1]$ auf Vollstetigkeit.

   (d) Bestimmen Sie bitte alle reellen Eigenwerte dieses Operators.