



Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^2)$ eine Abbildung mit $0 < \inf_{\partial B} |f(x)|$. Weiter Sei $\varphi(t) = f(e^{it})$ mit $t \in [0, 2\pi]$ erklärt.

(a) Zeigen Sie bitte durch Anwendung des Gausschen Integralsatzes, dass

$$\deg(f, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\det(\varphi(t), \varphi'(t))}{|\varphi(t)|^2} dt$$

gilt.

(b) Zeigen Sie bitte durch komplexwertige Rechnung

$$\deg(f, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$

Der Abbildungsgrad verallgemeinert also die Windungszahl einer ebenen, geschlossenen Kurve.

- (c) Indem Sie nun die komplexwertige Hilfsfunktion $h(t) = \log \varphi(t)$ betrachten, interpretieren Sie die Aussage "Prinzip vom Argument" für $\deg(f, B)$.

2. In der Situation von Aufgabe 1. zeigen Sie bitte

$$\deg(f, B) \in \mathbb{Z},$$

indem Sie zeigen, dass die Hilfsfunktion

$$\Phi(t) := \varphi(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

konstant ist.

3. Bestimmen Sie den Abbildungsgrad der Abbildungen $f_n(z) : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $z \mapsto z^n$, $z = x + iy$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

(a) Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten Sie die Funktion $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $x \mapsto \lambda x$. Zeigen Sie bitte

$$\deg(f, \Omega) = (\operatorname{sgn} \lambda)^n.$$

(b) Sei n ungerade und die stetige Funktion $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie bitte, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $x \in \partial\Omega$ gibt mit $f(x) = \lambda x$. (Hinweis: Betrachten Sie den Abbildungsgrad der Funktion $f - \lambda \operatorname{id}$.)