ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Gegeben sei ein Polynom n-ten Grades
$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$
Zeigen Sie bitte, dass es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $|P(z)| \geq 1$ gibt. (Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und betrachten Sie eine geeignete Homotopie.)

2. (a) Die Abbildung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und habe in $0 \in \mathbb{R}^2$ ein strenges lokales Maximum bzw. Minimum bzw. Sattel, d.h. $\nabla u(0) = 0$ und $\nabla^2 u(0)$ ist negativ definit bzw. positiv definit bzw. indefinit. Betrachten Sie das Gradientenfeld $f(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y))$ und zeigen Sie bitte
$$\operatorname{ind}(f, 0) = 1, \text{ bzw. } 1, \text{ bzw. } -1.$$
(b) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und für ein geeignetes $R > 0$ gelte:
$$x^2 + y^2 \geq R^2 \quad \Rightarrow u(x, y) = ax + by, \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 > 0.$$
Ferner habe u einen nichtdegenerierten kritischen Punkt wir in Teilaufgabe a). Zeigen Sie bitte: Dann hat u mindestens einen weiteren kritischen Punkt.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit $x_0 \in \Omega$. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $J_f(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie bitte
$$\operatorname{ind}(f, x_0) = \deg(f, B_\varepsilon(x_0))$$
für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit $0 \in \Omega$. Sei $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft: $x \in \partial\Omega \Rightarrow f(x) \cdot x > 0$. Zeigen Sie bitte, dass f in Ω eine Nullstelle hat.

5. Sei $f : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft: Für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $x_j \in [a_j, b_j]$ mit $j \neq i$ gelte
$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq 0$$
und
$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq 0.$$
Zeigen Sie bitte, dass f eine Nullstelle besitzt.