ulm university universität ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Dr. Matthias Bergner
Tel: +49 731 50-23505
matthias.bergner@uni-ulm.de

Jens Dittrich
Tel: +49 731 50-23504
jens.dittrich@uni-ulm.de

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ stetig. Zeigen Sie bitte, dass es dann ein $\zeta \in S^{n-1}$ gibt mit $f(\zeta) = \zeta$ oder $f(\zeta) = -\zeta$.

2. Sei $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ stetig und für alle $x \in \overline{B}$ gelte $f(x) \neq 0$. Weisen Sie bitte die Existenz von reellen Zahlen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ und Punkten $\zeta_1, \zeta_2 \in S^{n-1}$ mit $f(\zeta_i) = \lambda_i \zeta_i$ für $i = 1, 2$ nach.

3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und lokal injektiv mit der Eigenschaft
$$|f(x)| \to \infty \quad \text{für} \quad |x| \to \infty.$$
Zeigen Sie bitte, dass f surjektiv ist.

4. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Zeigen Sie, dass es höchstens abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten G_i von Ω gibt.
   (b) Sei G eine Zusammenhangskomponente einer offenen Menge Ω. Zeigen Sie, dass dann $\partial G \subset \partial \Omega$ gilt.

5. Sei $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung und $G \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ eine zusammenhängende, offene Menge. Zeigen Sie für $y_1, y_2 \in G$ gilt:
$$\deg(f, G, y_1) = \deg(f, G, y_2).$$